Suites, continuité

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Suites, continuité***

Si $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^n f(t)dt = 0 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(t)dt = f(1)$$

Solution : - *f continue est bornée sur $[0,1]$ donc*

$$\left|\int_0^1 t^n f(t)dt\right| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 t^n dt = \frac{\|f\|_\infty}{n+1} \to 0.$$

- *Pour la seconde limite, f étant continue en $t=1$*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ 1-\eta \leq t \leq 1 \Longrightarrow |f(t)-f(1)| \leq \varepsilon,$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 t^n(f(t)-f(1))dt\right| &\leq\ n\left(\int_0^{1-\eta} t^n|f(t)-f(1)|dt + \int_{1-\eta}^1 t^n|f(t)-f(1)|dt\right)\\ &\leq\ n\left(\frac{2\|f\|_\infty(1-\eta)^{n+1}}{n+1} + \frac{\varepsilon}{n+1}\right) \leq 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geq N_\varepsilon\end{aligned}$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(t)dt = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(1)dt = \lim_{n\to\infty}\frac{nf(1)}{n+1} = f(1).$$

Références