Suites et sous-suites

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Suites et sous-suites***

$(x_n)_n$ est une suite réelle bornée. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ vérifiant $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$; montrer que

$$\big((e^{iax_n})_n \ \&\ (e^{ibx_n})_n \text{ convergent } \big) \Longrightarrow ((x_n)_n \text{ converge }).$$

Solution : *Supposons $(x_n)_n$ divergente. Pour une suite bornée de réels divergente il n'y a qu'une alternative : elle possède deux sous-suites $(x_{s_n})_n, (x_{t_n})_n$ qui convergent vers deux limites distinctes l_1, l_2. Vu les hypothèses*

$$e^{ial_1} = \lim_n e^{iax_{s_n}} = \lim_n e^{iax_{t_n}} = e^{ial_2}$$

il existe donc $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $ial_1 = ial_2 + 2ik_1\pi$ i.e. $a(l_1 - l_2) = 2k_1\pi$. De même avec la seconde suite il existe $k_2 \in \mathbb{N}$: $b(l_1 - l_2) = 2k_2\pi$. De ces deux relations on déduit aussitôt (car $l_1 - l_2 \neq 0$) que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{k_1}{k_2}$ ce qui est bien sur absurde.

Références