Suites, équivalents

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Suites, équivalents***

Pour $n \geq 1$ on définit l'entier a_n comme le plus petit entier tel que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1.$$

Montrer que la suite $(a_n)_n$ est bien définie et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = e.$$

Solution : *La divergence de la série harmonique (vers $+\infty$) assure l'existence de la suite $(a_n)_n$. On peut remarquer qu'une récurrence donne facilement pour tout $n > 1$*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 \qquad \& \qquad \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1$$

i.e. $2n-1 < a_n < 3n-2$, donc si $\left(\frac{a_n}{n}\right)_n$ converge, sa limite sera dans l'intervalle $[2,3]$. Mais, vu la définition de a_n :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{a_n}$$

en comparant avec une intégrale

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1$$

i.e.

$$1 - \frac{1}{n} < \log\left(\frac{a_n}{n}\right) < 1$$

le résultat suit en prenant l'exponentielle.

Références