Irrationalité de π^2 et donc de π

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Irrationalité de π^2 et donc de π***

[1]

Montrer que π^2 est irrationel, en déduire que π est irrationel.

Solution : *Considérons pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la fonction*

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k,$$

il n'est pas difficile de vérifier les propriétés suivantes :

- ⇝ $c_k \in \mathbb{N}$ *pour tout* $n \leq k \leq 2n$,
- ⇝ $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!}, \quad \forall\, x \in]0,1[$,
- ⇝ $f_n^{(k)}(0) = 0$ *si* $k < n$ *ou si* $k > 2n$,
- ⇝ $f_n^{(k)}(0) = \dfrac{k!c_k}{n!}$ *si* $n \leq k \leq 2n$.

Donc f_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières pour $x = 0$; comme de plus f_n est symétrique par rapport à $x = 1/2$, il en est de même si $x = 1$.

Supposons π^2 rationnel égal à $\dfrac{p}{q}$ et soit

$$g_n(x) = q^n\left(\pi^{2n}f_n(x) - \pi^{2n-2}f_n''(x) + \pi^{2n-4}f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right).$$

Les nombres $g_n(0)$ et $g_n(1)$ sont entiers et de plus

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(g_n'(x)\sin(\pi x) - \pi g_n(x)\cos(\pi x)\right) &= \left(g_n''(x) + \pi^2 g_n(x)\right)\sin(\pi x)\\ &= q^n\pi^{2n+2}f_n(x)\sin(\pi x)\\ &= \pi^2 p^n \sin(\pi x) f_n(x).\end{aligned}$$

Donc

$$\pi\int_0^1 p^n \sin(\pi x) f_n(x)dx = \left[\frac{g_n'(x)\sin(\pi x)}{\pi} - g_n(x)\cos(\pi x)\right]_0^1 = g_n(0) + g_n(1)$$

est un entier. Mais de l'autre coté

$$0 < \pi \int_0^1 p^n \sin(\pi x) f_n(x) dx < \frac{\pi p^n}{n!}$$

et $\frac{\pi p^n}{n!}$ *est strictement plus petit que* 1 *pour* n *assez grand, d'où la contradiction*

Remarque : *cette démonstration est due à Niven (1946), la preuve originale de l'irrationalité de* π *par Lambert date de 1766, il est chaudement recommandé de la consulter ([1], page 130).*

Références

[1] P. Eymard and J.P. Lafon. Autour du Nombre π. Hermann, 1999.