

# Irrationalité de $e$ (3)

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

## Exercice 0.1 ★ Irrationalité de $e$ (3)

Soit  $e := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + \frac{1}{n!} + r_n$ . Montrer que

$$\frac{1}{n+1} < n!r_n < \frac{1}{n}$$

en déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi$  puis que  $e \notin \mathbb{Q}$ .

**Solution :** On a

$$n!r_n = n! \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

i.e.

$$n!r_n > \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit aussi

$$n!r_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{1}{n}$$

soit la double inégalité. De là on tire immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n n!r_n = 1, \quad (\star)$$

puis,

$$n \sin(2\pi en!) = n \sin(2\pi n!r_n) = \frac{\sin(2\pi n!r_n)}{2\pi n!r_n} 2\pi r_n n!n \rightarrow 2\pi (\star)$$

la limite résultant de  $(\star)$  et  $(\star)$  via  $\sin(x) \sim x$  sur  $x \rightarrow 0$ . D'un autre côté, si  $e \in \mathbb{Q}$  :  $\sin(2\pi en!) = 0$  d'où le résultat.

**Remarques :** - On peut donner une variante (plus classique, plus rapide) basée sur les mêmes inégalités : supposons que  $e = \frac{p}{q}$  avec  $q > 1$ , vu ce qui précède

$$0 < q! \left| e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right| = q!r_q < \frac{1}{q}$$

autrement dit

$$q! \left( e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) \in ]0, 1[$$

ce qui est visiblement absurde car

$$q! \left( e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) = q! \left( \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) \in \mathbb{N}.$$

- Le même argument montre que pour toute suite  $(\varepsilon_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  (non identiquement nulle à partir d'un certain rang), le réel  $\sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon_n}{n!}$  est irrationnel.
- Voir aussi page ?? pour une autre preuve de l'irrationalité de  $e$ .
- Montrer que  $\pi$  est irrationnel est plus délicat, une démonstration est donnée dans l'exercice suivant.

## Références