Irrationalité de e (3)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★ ***Irrationalité de e (3)***

Soit $e := \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\dots + \frac{1}{n!} + r_n$. *Montrer que*

$$\frac{1}{n+1} < n!r_n < \frac{1}{n}$$

en déduire que $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi$ *puis que* $e \notin \mathbb{Q}$.

Solution : *On a*

$$n!r_n = n!\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

i.e.

$$n!r_n > \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit aussi

$$n!r_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{1}{n}$$

soit la double inégalité. De là on tire immédiatement

$$\lim_{n\to\infty} n\, n!r_n = 1,\ (\bigstar)$$

puis,

$$n\sin(2\pi e n!) = n\sin(2\pi n!r_n) = \frac{\sin(2\pi n!r_n)}{2\pi n!r_n}2\pi r_n\, n!n \to 2\pi(\star)$$

la limite résultant de $(\bigstar)$ *et* $(\star)$ *via* $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. *D'un autre côté, si* $e \in \mathbb{Q}$: $\sin(2\pi e n!) = 0$ *d'où le résultat.*

Remarques : - *On peut donner une variante (plus classique, plus rapide) basée sur les mêmes inégalités : supposons que* $e = \frac{p}{q}$ *avec* $q > 1$, *vu ce qui précède*

$$0 < q!\left|e - \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\right| = q!r_q < \frac{1}{q}$$

autrement dit

$$q!\left(e-\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\right)\in\,]0,1[$$

ce qui est visiblement absurde car

$$q!\left(e-\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\right)=q!\left(\frac{p}{q}-\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\right)\in\mathbb{N}.$$

- *Le même argument montre que pour toute suite* $(\varepsilon_n)_n\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *(non identiquement nulle à partir d'un certain rang), le réel* $\sum_{n\geq 0}\frac{\varepsilon_n}{n!}$ *est irrationel.*
- *Voir aussi page* **??** *pour une autre preuve de l'irrationalité de* e.
- *Montrer que* π *est irrationnel est plus délicat, une démonstration est donnée dans l'exercice suivant.*

Références