Irrationalité de e (2)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Irrationalité de** e **(2)***

On définit la fonction exponentielle comme la solution de l'équation différentielle $y' = y,\ y(0) = 1$. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour montrer que $e := y(1) \notin \mathbb{Q}$.

Solution : *On raisonne par l'absurde en suppposant $e = p/q \in \mathbb{Q}$. Commencons par remarquer qu'en appliquant à la fonction exponentielle la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[0,1]$, il existe $u \in]0,1[$ tel que*

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{e^u}{3!},$$

et la fonction exponentielle étant strictement croissante

$$\frac{5}{2} < e < \frac{5}{2} + \frac{e}{6},$$

soit $5/2 < e < 3$. Il en résulte que si $e = p/q \in \mathbb{Q}$ nécessairement $q > 2$. Maintenant appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre q sur $[0,1]$, il existe $u_q \in]0,1[$ tel que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{e^{u_q}}{(q+1)!},$$

soit

$$q!\left(e - \left[1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q!}\right]\right) = \frac{q!e^{u_q}}{(q+1)!}$$

qui implique

$$0 < \left| q!e - \sum_{k=0}^{q} q!k!^{-1} \right| < \frac{1}{q+1} < \frac{1}{3} < 1$$

ce qui est absurde puisque $e - \sum_{k=0}^{q} k!^{-1} \in \mathbb{Z}$, contradiction et $e \in \mathbb{Q}$.

Voir aussi page **??** *pour une autre preuve de l'irrationalité de e.*

Références