Suites numériques, calculs d'équivalents

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Suites numériques, calculs d'équivalents***

① *Soit* $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ *une suite convergente de limite* $l \in \mathbb{R}$. *On pose* $v_n = u_n - l$ *et on suppose qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} v_{n+1}^\alpha - v_n^\alpha = \lambda \neq 0.$$

Montrer que

$$u_n - l \underset{n\to\infty}{\sim} (n\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

② ***Application :*** *Soit la suite définie par* $0 < u_0 \leq 1$ *et pour* $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$, *justifier la convergence de* $(u_n)_n$ *et déduire de ce qui précède que* $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Solution :

1. $(v_n)_n$ *converge vers zéro et si* $\lim_{n\to\infty} v_{n+1}^\alpha - v_n^\alpha = \lambda$ *on a par Cesaro :*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}^\alpha - v_k^\alpha}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{v_n^\alpha}{n} - \frac{v_0^\alpha}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{v_n^\alpha}{n}\end{aligned}$$

soit vu que $\lambda \neq 0$ *:*

$$u_n - l \underset{n\to\infty}{\sim} (n\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

2. *Passons à l'exemple : la suite* $(u_n)_n$ *est bien définie, décroissante minorée : elle est donc convergente vers la solution* $l \in [0,1]$ *de* $\sin(l) = l$, *soit* $l = 0$. *Pour voir si la méthode précédente s'applique écrivons*

$$\begin{aligned}u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= \sin^\alpha(u_n) - u_n^\alpha\\ &= \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha \quad (\text{ car } \lim_n u_n = 0)\\ &= u_n^\alpha\left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) - u_n^\alpha\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{6}u_n^{\alpha+2} \quad \text{si } \alpha \neq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\alpha = -2$

$$\lim_n \; u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{1}{3}$$

et par suite $\qquad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$

Remarque : *L'exemple précédent est assez classique, pour changer vous pouvez par exemple montrer que si* $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+,\; S_n := \sum_{k=1}^n a_k^2$ *et* $\lim_n a_n S_n = 1$ *alors* $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^{-1/3}$.

Références