Série non commutativement convergente

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

18 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Série non commutativement convergente***

Exemple d'une série convergente dont un réarrangement des termes modifie la somme. Il y a beacoup de choses à dire et d'exemples plus simples.........

Solution : *Il est bon de rappeler qu'il existe une constante (constante d'Euler) $\gamma > 0$ telle que*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + \varepsilon_n \quad \textit{avec} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.(\bigstar)$$

Considérons alors

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

on a

$$\begin{aligned}
y_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= x_{2n} - x_n = \log(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n} - \log(n) - \gamma - \varepsilon_n \\
&= \log(2) + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \longrightarrow \log(2) \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

la série $\sum_{n\geq 1} y_n$ est donc convergente et de somme $\log(2)$.

Groupons maintenant les termes en prenant alternativement deux termes positifs puis un terme négatif, par exemple pour les premiers termes :

$$1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{11},\ -\frac{1}{6}\dots$$

si on désigne par z_n la somme des n premiers termes de cette nouvelle suite

$$\begin{aligned}
z_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= x_{4n} - \frac{1}{2}\left(x_{2n} + x_n\right) \\
&= \log(4n) - \frac{1}{2}\left(\log(2n) + \log(n)\right) + \varepsilon_{4n} - \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{2n} + \varepsilon_n\right) \longrightarrow \frac{3}{2}\log(2) \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

et la modification de l'ordre des termes a bien modifié la somme de la série.

Remarque : ....

Références