Formule de Wallis et applications

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

27 mars 2024

Exercice 0.1 ★ ***Formule de Wallis et applications***

[1],

①

Établir la formule de Wallis (1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}\frac{4.4}{3.5}\frac{6.6}{5.7}\cdots = \prod_{n\geq 1}\frac{4n^2}{4n^2-1}.(\star)$$

②

En déduire que dans le jeu de pile ou face la probabilité p_n lors de $2n$ jets successifs d'obtenir n pile et n face satifait, quand n tends vers l'infini, à l'équivalent

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

③

En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^\infty \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

③

En déduire la formule de Stirling (1730)

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

④

Du développement de Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

préciser la formule de Stirling

$$\frac{\pi}{2} - p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{8n}$$

Références

[1] P. Eymard and J.P. Lafon. Autour du Nombre π. Hermann, 1999.