Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, rapporté à un repère orthonormé direct, on considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation cartésienne

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

1. *Trouvez une équation cartésienne de la perpendiculaire commune Δ à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.*
2. *Déterminez la distance entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ par deux méthodes différentes :*
   (a) *la première utilisant le cours.*
   (b) *la seconde utilisant le plan $\mathcal{P}$ contenant la droite $\mathcal{D}_2$ et parallèle à la droite $\mathcal{D}_1$*

Solution :

1. *Le vecteur $\overrightarrow{d_1}\begin{vmatrix}1\\5\\2\end{vmatrix}$ dirige la droite $\mathcal{D}_1$ et le vecteur $\overrightarrow{d_2}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ dirige la droite $\mathcal{D}_2$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{d_1} \wedge \overrightarrow{d_2}\begin{vmatrix}3\\1\\-4\end{vmatrix}$ dirige la perpendiculaire commune Δ. Écrivons une équation du plan $\mathcal{P}_1$ contenant la droite $\mathcal{D}_1$ et orthogonal à $\mathcal{D}_2$. En fixant $z = 0$ dans l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$, on trouve qu'un point de D_1 est $A_1(-1/2, -7/2, 0)$. Le plan $\mathcal{P}_1$ passe par A_1 et admet $\overrightarrow{n}_1 = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{d_1} = 2\begin{vmatrix}11\\-5\\7\end{vmatrix}$ comme vecteur normal. On a donc : $\mathcal{P}_1 : \quad 11x - 5y + 7z - 12 = 0.$*

   De même, on détermine une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ contenant $\mathcal{D}_2$ et orthogonal à $\mathcal{D}_1$. En fixant $z = 0$ dans l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_2$, on trouve qu'un point de D_2 est

$A_2\,(-1,-1,0)$. *Le vecteur* $\overrightarrow{n}_2 = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{d}_2 = \begin{vmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{vmatrix}$ *est normal à* $\mathcal{P}_2$ *donc* $P_2 : \quad 5x-7y+2z-2 = 0$.

On en tire une équation cartésienne de Δ *:*

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} 11x-5y+7z-12=0 \\ 5x-7y+2z-2=0 \end{cases}}$$

2. (a) *D'après le cours*

$$d\,(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{d}_2} \wedge \overrightarrow{d_2}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 5 & 1 & 5/2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{26}}}$$

(b) *Pour calculer* $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, *considérons le plan* $\mathcal{P}$ *contenant la droite* $\mathcal{D}_2$ *et parallèle à la droite* $\mathcal{D}_1$. *Un vecteur normal à ce plan est* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{d_1} \wedge \overrightarrow{d_2}$. *La distance entre* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *est la distance entre un point quelconque de* $\mathcal{D}_1$ *et le plan* $\mathcal{P}$. *On trouve*

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = d\,(A_1, \mathcal{P}) = \frac{\left|\overrightarrow{w}.\overrightarrow{A_1A_2}\right|}{\|\overrightarrow{w}\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{26}}}.$$

Références