Pas de titre

François Capaces¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and Alain Soyeur³

¹, ,

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, rapporté à un repère orthonormé direct, on considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation cartésienne

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

1. Trouvez une équation cartésienne de la perpendiculaire commune Δ à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
2. Déterminez la distance entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ par deux méthodes différentes :
 - (a) la première utilisant le cours.
 - (b) la seconde utilisant le plan $\mathcal{P}$ contenant la droite $\mathcal{D}_2$ et parallèle à la droite $\mathcal{D}_1$

Solution :

1. Le vecteur $\vec{d}_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix}$ dirige la droite $\mathcal{D}_1$ et le vecteur $\vec{d}_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ dirige la droite $\mathcal{D}_2$. Par conséquent, le

vecteur $\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2 \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{vmatrix}$ dirige la perpendiculaire commune Δ . Écrivons une équation du plan $\mathcal{P}_1$

contenant la droite $\mathcal{D}_1$ et orthogonal à $\mathcal{D}_2$. En fixant $z = 0$ dans l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$, on trouve qu'un point de $\mathcal{D}_1$ est $A_1(-1/2, -7/2, 0)$. Le plan $\mathcal{P}_1$ passe par A_1 et admet

$\vec{n}_1 = \vec{u} \wedge \vec{d}_1 = 2 \begin{vmatrix} 11 \\ -5 \\ 7 \end{vmatrix}$ comme vecteur normal. On a donc : $\mathcal{P}_1 : 11x - 5y + 7z - 12 = 0$.

De même, on détermine une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ contenant $\mathcal{D}_2$ et orthogonal à $\mathcal{D}_1$. En fixant $z = 0$ dans l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_2$, on trouve qu'un point de $\mathcal{D}_2$ est

$A_2(-1, -1, 0)$. Le vecteur $\vec{n}_2 = \vec{u} \wedge \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_2$ donc $\mathcal{P}_2 : 5x - 7y + 2z - 2 =$

0.

On en tire une équation cartésienne de Δ :

$$\Delta : \begin{cases} 11x - 5y + 7z - 12 = 0 \\ 5x - 7y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

2. (a) D'après le cours

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{|\det(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \overrightarrow{A_1A_2})|}{\|\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 5 & 1 & 5/2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{26}}}$$

(b) Pour calculer $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, considérons le plan $\mathcal{P}$ contenant la droite $\mathcal{D}_2$ et parallèle à la droite $\mathcal{D}_1$. Un vecteur normal à ce plan est $\vec{w} = \vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2$. La distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la distance entre un point quelconque de $\mathcal{D}_1$ et le plan $\mathcal{P}$. On trouve

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = d(A_1, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{w} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}|}{\|\vec{w}\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{26}}}.$$

Références