Convergence de $\sum_n a_n^{-3}$, où $|a_n - a_m| > 1,\ \forall\, m \neq n \in \mathbb{N}$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Convergence de*** $\sum_n a_n^{-3}$***, où*** $|a_n - a_m| > 1,\ \forall\, m \neq n \in \mathbb{N}$

[1], [2].

Soit $(a_n)_n \subset \mathbb{C}^\star$ *une suite de nombres complexes vérifiant*

$$\forall\, m \neq n \in \mathbb{N} \quad : \quad |a_n - a_m| \geq 1.(\star)$$

Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a_n^3}$$

converge.

Solution : *Considérons une suite* $(a_n)_n$ *de nombres complexes vérifiant la propriété* $(\star)$*. Posons pour tout entier* k

$$S_k = \{n \in \mathbb{N} \ : \quad k < |a_n| \leq k+1\}.$$

Les disques fermés de centre a_n *et de rayon* $1/2$ *sont par hypothèse deux à deux disjoints et pour tout* $n \in S_k$

$$\overline{D}(a_n, 1/2) \subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ k - \frac{1}{2} \leq |z| \leq k + \frac{3}{2}\} = C(0, k-1/2, k+3/2).$$

(si $k = 0$*, interpréter le second terme comme le disque* $D(0, 3/2)$*) soit, en sommant les aires*

$$card(S_k)\frac{\pi}{4} \leq \pi \left[\left(k + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right] = 2\pi(2k+1)$$

si $k \in \mathbb{N}^\star$ *et*

$$card(S_0)\frac{\pi}{4} \leq \pi\frac{9}{4}$$

si $k = 0$*. Ainsi*

$$card(S_0) \leq 9 \quad et \quad card(S_k) \leq 8(2k+1),\ \forall\, k \in \mathbb{N}^\star.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$

$$\sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leq \frac{card(S_k)}{k^3} \leq \frac{8(2k+1)}{k^3} \leq \frac{24}{k^2}$$

car $\overline{D}(a_n, 1/2) \subset C(0, k-1/2, k+3/2)$ *implique* $|a_n| \leq k$ *et* $k \geq 1 \implies 2k+1 \leq 3k$. *De même* S_0 *étant fini, la somme* $\sum_{n \in S_0} \frac{1}{|a_n|^3}$ *est finie et finalement*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|a_n|^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leq \sum_{n \in S_0} \frac{1}{|a_n|^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{k^2} < \infty$$

où la sommation par paquets dans le second terme est légitime puisque la série est à termes positifs et $(S_k)_{k \geq 0}$ *une partition de* $\mathbb{N}$.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.

[2] D.D. Bonar and M.J. Khoury. Real Infinite Series. Classroom Ressource Materials. M.A.A., 2006.