Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ (8)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Calcul de l'intégrale de Cauchy*** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ ***(8)***

En intégrant $f(x,t) = e^{-xy} sin(x)$ *sur* $[\epsilon, T] \times [0, +\infty[$, $0 < \epsilon < T$, *calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Solution : *Soient* $0 < \varepsilon < T$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^T \frac{\sin(x)}{x} dx &= \int_\varepsilon^T \sin(x) \left(\int_0^\infty e^{-xy} dy \right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_\varepsilon^T \sin(x) e^{-xy} dx \right) dy \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-y\varepsilon}(\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon) - e^{-yT}(\cos T + y \sin T)}{y^2+1} dy \\
&= \int_0^\infty g_{\varepsilon,T}(y) dy
\end{aligned}$$

l'application ci-dessus du théorème de Fubini est justifiée par $|f(x,y)| \le e^{-xy}$ *et*

$$\int_\varepsilon^T \left(\int_0^\infty e^{-xy} dy \right) dx = \int_\varepsilon^T \left[-\frac{e^{xy}}{x} \right]_0^\infty dx = \int_\varepsilon^T \frac{dx}{x} = \log \frac{T}{\varepsilon} < \infty.$$

pour tous $0 < \varepsilon < T$.

Maintenant, observons que pour $0 < \varepsilon \le y$

$$|e^{-y\varepsilon}(\cos\varepsilon + y \sin\varepsilon)| \le 1 + y\varepsilon e^{-y\varepsilon} \le 1 + e^{-1},$$

de même, pour $T \ge 1$

$$|e^{-yT}(\cos T + y\sin T)| \le e^{-yT}(1+y) \le e^{-y}(1+y).$$

Ainsi pour $0 < \varepsilon \le y \le T$ *et* $T \le 1$

$$|g_{\varepsilon,T}(y)| \le \frac{\max\{(1+e^{-1}, e^{-y}(1+y)\}}{y^2+1} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Il est donc légitime d'invoquer le théorème de la convergence dominée pour écrire

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\lim_{T\to+\infty}\int_0^\infty g_{\varepsilon,T}(y)dy=\int_0^\infty \frac{dy}{y^2+1}=\frac{\pi}{2},$$

d'autre part, comme

$$\int_\varepsilon^T \frac{\sin(x)}{x}dx=\int_0^\infty g_{\varepsilon,T}(y)dy$$

nous avons finalement

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\lim_{T\to+\infty}\int_0^\infty g_{\varepsilon,T}(y)dy=\frac{\pi}{2}.$$

❑

Références