

Autour d'Hölder

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Autour d'Hölder

[1]

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, s'il existe $a > 0$ tel que

$$0 \leq f(x) \leq a^{2/3}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x) dx = a,$$

montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder que

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)} dx \geq a^{2/3}.$$

Solution : D'après l'inégalité d'Hölder¹ nous avons pour $p > 1$

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 f(x)^{\frac{1}{2p} + 1 - \frac{1}{2p}} dx \leq \left(\int_0^1 \left[f(x)^{\frac{1}{2p}} \right]^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^1 \left[f(x)^{1 - \frac{1}{2p}} \right]^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} dx \right)^{1/2p} \left(\int_0^1 \left[(a^{2/3})^{1 - \frac{1}{2p}} \right]^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} dx \right)^{1/2p} a^{\frac{2p-1}{3p}} \end{aligned}$$

soit

$$a^{\frac{p+1}{3}} \leq \int_0^1 \sqrt{f(x)} dx, \quad \forall p > 1.$$

Comme $p > 1$ est arbitraire, le résultat suit en faisant tendre p vers 1. □

Références

- [1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Sequences and Series, volume 1 of Student Mathematical Library. AMS, 2001.