Autour des sommes de Riemann

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Autour des sommes de Riemann***

[1], 2008.

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}^{\star +})$.

❶ *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$, *établir l'existence de* $(a_{n,0}, \dots, a_{n,n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tel que*

$$0 = a_{n,0} < \dots < a_{n,n} = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, i \in \{0, \dots, n-1\} \ : \quad \int_{a_{n,i}}^{a_{n,i+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt.$$

❷ *Déterminer la limite, quand* n *tends vers* $+\infty$ *de :* $\dfrac{a_{n,0} + \dots + a_{n,n}}{n+1}$.

Solution : ❶ f *étant continue sur* $[0,1]$ *à valeurs strictement positives l'application* $F \ : \ [0,1] \ni x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ *est continue, strictement croissante de* $[0,1]$ *sur* $[0, \int_0^1 f(t)dt]$ *: par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $a_{n,0}, \dots, a_{n,n}$ *dans* $[0,1]$ *tels que*

$$F(a_{n,k}) = \frac{k}{n}\int_0^1 f(t)dt, \quad k = 0, \dots, n.$$

et ces réels sont uniques.

❷ *Vu ce qui précède,* $F^{-1} \in \mathscr{C}([0, \int_0^1 f(t)dt], [0,1])$, *la suite* $(\frac{k}{n}\int_0^1 f(t)dt)_{k=0}^n$ *est une subdivision de l'intervalle* $[0, \int_0^1 f(t)dt]$, *par conséquent*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n,0} + \dots + a_{n,n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{k}{n}\int_0^1 f(t)dt\right) = \int_0^{\int_0^1 f(u)du} F^{-1}(t)dt.$$

❏

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.