

# Encore une petite inégalité

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

**Exercice 0.1** ★ **Encore une petite inégalité**

[1].

Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], [m, M])$  vérifiant  $\int_a^b f(t)dt = 0$ . Montrer que

$$\int_a^b f^2(t)dt \leq -mM(b-a).$$

**Solution :** Vu les hypothèses

$$\int_a^b (f(t) - m)(M - f(t))dt \geq 0.$$

Soit

$$(M + m) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f^2(t)dt - mM(b-a) = - \int_a^b f^2(t)dt - mM(b-a) \geq 0,$$

i.e.

$$\int_a^b f^2(t)dt \leq -mM(b-a).$$

Q.E.D. □

## Références

- [1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Integration, volume 3 of Student Mathematical Library. AMS, 2003.