$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \leq \sqrt{8}\left(\int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2dt\right)^{\frac14}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2dt\right)^{\frac14}.$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \leq \sqrt{8}\left(\int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2dt\right)^{\frac14}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2dt\right)^{\frac14}.$
[1]

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \leq \sqrt{8}\left(\int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2dt\right)^{\frac14}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2dt\right)^{\frac14}.$$

Solution : *Il n'y a bien sûr pas de raisons que $f \in L^1(\mathbb{R})$ assure la convergence des deux intégrales dans le terme de droite de l'inégalité. Dans le cas où au moins l'une de ces deux intégrales diverge on convient que l'inégalité s'écrit $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \leq +\infty$ et il n'y a rien à démontrer. On peut donc dorénavant, supposer que ces trois intégrales convergent.*

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, pour faire apparaitre un terme du type $tf(t)$, il convient d'isoler l'origine :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt &= \int_{[-x,x]} |f(t)|dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]} \frac{1}{|t|}|tf(t)|dt \\ &\leq \sqrt{2x}\sqrt{\int_{[-x,x]} |f(t)|^2dt} + \sqrt{\frac{2}{x}}\sqrt{\int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]} |tf(t)|^2dt} \\ &\leq \sqrt{2Ax} + \sqrt{\frac{2B}{x}} := \varphi(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star\end{aligned}$$

avec $A = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2dt,\ B = \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2dt$, et où on a appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les deux intégrales pour obtenir la seconde inégalité. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \leq \inf_{x\in\mathbb{R}_+^\star} \varphi(x)$$

et déterminer cet infimum ne pose aucun problème puisque φ tends vers $+\infty$ lorsque x tends vers 0 et $+\infty$ et que sa dérivée ne s'annule qu'au point $x = \sqrt{B/A}$ soit $\varphi(\sqrt{B/A}) = \inf_{x\in\mathbb{R}_+^\star} \varphi(x) = \sqrt{8}A^{1/4}B^{1/4}$, soit l'inégalité demandée. ❏

Références

[1] J.M. Steele. The Cauchy-Schwarz Master Class. MAA Problem Books Series. M.A.A.& Cambridge University Press, 2004.