Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère dans $\mathcal{E}_3$ la droite

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

et les points $A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{vmatrix}$, $A' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 - h \end{vmatrix}$. *On suppose que $A \notin \mathcal{D}$ et que $A' \notin \mathcal{D}$.*

1. *Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{P}'$) passant par le point A (resp A') contenant la droite $\mathcal{D}$.*
2. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, p, q, h pour que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ soient perpendiculaires.*

Indication 0.0 : *On pourra utiliser la notion de faisceau de plans développée dans l'exercice* **??** *page* **??**

Solution :

1. *Le plan $\mathcal{P}$ appartient au faisceau de plans issu de la droite $\mathcal{D}$. Son équation cartésienne est de la forme*
$$(\mathcal{P}) : \theta(x - az - p) + (y - bz + q) = 0$$
(s'il est différent du plan d'équation $x = az + p$). Il contient le point A si et seulement si
$$\theta = -\frac{bh + q}{ah + p}$$
(On suppose que $ah + p \neq 0$. Comme $A \notin \mathcal{P}$, si $ah + p = 0$, le plan cherché serait le plan d'équation $x - az - p = 0$). On trouve alors l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$:
$$-(bh + q)x + (ah + p)y + (aq - bp)z + h(bp - aq) = 0$$
En utilisant la même technique, on trouve une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$:
$$-(bh - q)x + (ah - p)y + (bp - aq)z + h(bp - aq) = 0$$

2. *Les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si*

$$(bh+q)(bh-q)+(ah+p)(ah-p)-(aq-bp)^2=0$$

c'est-à-dire

$$h^2(a^2+b^2)=p^2(b^2+1)+q^2(a^2+1)-2abpq.$$

Références