$\Gamma'(1) = -\gamma$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ $\Gamma'(1) = -\gamma$

Montrer que

$$\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log(t)dt$$

pour en déduire que

$$\Gamma'(1) = -\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)\right).$$

(γ est la trés célèbre constante d'Euler) On pourra effectuer le changement de variables $u = 1 - t/n$ dans l'intégrale.

Solution : *Il est considéré comme acquis*[1] *que la fontion Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \log^k(t) e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

➪ *Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions*

$$f_n(x) = \log(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t) = \begin{cases} \log(t)\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \textit{pour} \quad t \in [0, n], \\ 0 & \textit{si} \quad x > n. \end{cases}$$

La suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$ vers $t \mapsto \log(t)e^{-t}$ et l'inégalité classique $(1-t)^a \leq e^{-at}, a > 0, 0 \leq t \leq 1$, assure la domination

$$|f_n(t)| \leq |\log(t)|e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Le théorème de la convergence dominée peut donc s'appliquer :

$$\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log(t)dt = \lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} \log(t)e^{-t}dt = \Gamma'(1).$$

➪ *Posons* $I_n = \int_0^n (1-t/n)^n \log(t)dt$*, il nous reste à prouver que* $\lim_n I_n = -\gamma$*. Pour cela, on fait dans* I_n *le changement de variables* $u = 1 - t/n$ *:*

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \log(t)dt = \int_0^1 u^n \log(n(1-u))ndt \\ &= \int_0^1 u^n \log(n)ndt + \int_0^1 u^n \log(1-u)ndt \\ &= \frac{n\log(n)}{n+1} - n\int_0^1 u^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k}dt \\ &= \frac{n\log(n)}{n+1} - \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} n\int_0^1 \frac{u^{n+k}}{k}du \\ &= \frac{n\log(n)}{n+1} - \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{n}{k(n+k+1)} = \frac{n\log(n)}{n+1} - \lim_{N\to\infty} J_N \end{aligned}$$

où

$$J_N = \sum_{k=0}^{N}\frac{n}{k(n+k+1)} = \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k+1}\right).$$

Pour $N > n$ *on peut écrire*

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{1}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{N}-\frac{1}{n+1}-\dots-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}-\dots-\frac{1}{N+n+1}\right) \\ &= \frac{n}{n+1}\left[1+\dots+\frac{1}{n} - \underbrace{\left(\frac{1}{N+1}+\dots+\frac{1}{N+n+1}\right)}_{n+1\ \ termes}\right] \end{aligned}$$

le groupe termes sur l'accolade est constitué de $n+1$ *termes, indépendant de* N *: il tendra donc vers* 0 *avec* N*, soit*

$$\lim_{N\to\infty} J_N = \frac{n}{n+1}\left(1+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

puis

$$I_n = \frac{n\log(n)}{n+1} - \lim_{N\to\infty} J_N = \frac{n\log(n)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(1+\dots+\frac{1}{n}\right).$$

et finalement

$$\begin{aligned} \Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty} I_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\log(n)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(1+\dots+\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\log(n) - \left(1+\dots+\frac{1}{n}\right)\right) = -\gamma. \end{aligned}$$

❏

Références