

Une formule de Ramanujan et le d.s.e. de la fonction tangente

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 mai 2023

Exercice 0.1 ★ Une formule de Ramanujan et le d.s.e. de la fonction tangente

Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $|\operatorname{re}(z)| := \sigma < 1$, on considère l'application

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(zt)}{\operatorname{sh}(t)}, & \text{si } t > 0, \\ z, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

❶ Montrer que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$ et vérifie

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n \geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}.$$

❷ Sachant que¹

$$\pi \cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{n^2 - z^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi z}{2}\right), \quad \forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{re}(z)| < 1.$$

❸ En développant f en série entière (pour la variable z) montrer que

$$\frac{\pi}{2} \tan(\pi z/2) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(zt)}{\operatorname{sh}(t)} dt = 2 \sum_{n \geq 0} (1 - 2^{-2n-2}) \zeta(2n+2) z^{2n+1}, \quad \forall |z| < 1.$$

1.

Solution : ❶ Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = z = f(0)$, f est continue à l'origine et donc sur \mathbb{R}_+ . En outre $|\sigma| < 1$ implique

$$|f(t)| = \left| \frac{e^{zt} - e^{-zt}}{2\text{sh}(t)} \right| \leq \frac{e^{|\sigma t|}}{|\text{sh}(t)|} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{(|\sigma|-1)t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

ainsi $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Pour $t > 0$, on peut écrire

$$f(t) = \text{sh}(zt) \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}} = 2e^{-t} \text{sh}(zt) \sum_{n \geq 0} e^{-2nt} = \sum_{n \geq 0} \left(e^{(z-2n-1)t} - e^{-(z+2n+1)t} \right) := \sum_{n \geq 0} u_n(t),$$

et les fonctions u_n sont intégrables sur \mathbb{R}_+ car (toujours car $|\sigma| < 1$)

$$|u_n(t)| \leq e^{-2nt} \left| e^{(z-1)t} - e^{-(z+1)t} \right| \leq 2e^{-2nt} e^{(|\sigma|-1)t} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Un petit calcul nous donne

$$\int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

(bien remarquer que $|\sigma| < 1$ assure que $(2n+1)^2 - z^2 \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$). Ainsi, formellement

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 0} u_n(t) dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

il ne reste donc plus qu'à justifier l'échange $\int \sum = \sum \int$ ci-dessus. Pour cela, il faut être délicat car la condition suffisante « la série $\sum_n \int_{\mathbb{R}_+} |u_n(t)| dt$ converge » n'est pas ici réalisée² et il faut se ramener au cadre des suites de fonctions en posant

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n u_k(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(S_n)_n$ est simplement convergente sur \mathbb{R}_+^* et vérifie

$$|S_n(t)| \leq |\text{sh}(zt)| \sum_{k=0}^n e^{-(2k+1)t} \leq |\text{sh}(zt)| \sum_{k \geq 0} e^{-(2k+1)t} = |f(t)| \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

L'hypothèse de domination est donc vérifiée et l'échange $\int \sum = \sum \int$ est justifié, CQFD.

❷ Il suffit d'un peu de patience et d'attention. Avec la question précédente nous avons pour $|\text{re}(z)| < 1$ et $z \neq 0$ (si $z = 0$ il n'y a rien à démontrer)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t) dt &= \sum_{n \geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{2z}{n^2 - z^2} - \sum_{n \geq 0} \frac{2z}{(2n)^2 - z^2} \\ &= -\frac{2}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{n^2 - z^2} + \frac{2}{z} - \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{(2n)^2 - z^2} \\ &= -\frac{1}{z} - \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{z/2}{(z/2)^2 - n^2} \\ &= -\pi \cotan(\pi z) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{z}{(z/2)^2 - n^2} \right) \\ &= -\pi \cotan(\pi z) + \frac{\pi}{2} \cotan(\pi z/2) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos^2(\pi z/2) - \cos(\pi z)}{\cos(\pi z/2) \sin(\pi z/2)} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin^2(\pi z/2)}{\cos(\pi z/2) \sin(\pi z/2)} = \frac{\pi}{2} \tan(\pi z/2). \end{aligned}$$

③ Pour $t \geq 0$ on a

$$f(t) = \frac{\text{sh}(zt)}{\text{sh}(t)} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n+1} z^{2n+1}}{\text{sh}(t)(2n+1)!} := \sum_{n \geq 0} h_n(t).$$

Les applications h_n sont clairement dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ et nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h_n(t) dt &= \int_0^\infty \frac{t^{2n+1} z^{2n+1}}{\text{sh}(t)(2n+1)!} dt \\ &= \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^\infty \sum_{k \geq 0} t^{2n+1} e^{-(2k+1)t} dt = \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^\infty \sum_{k \geq 0} g_{n,k}(t) dt \\ &\stackrel{\star}{=} \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{k \geq 0} \int_0^\infty t^{2n+1} e^{-(2k+1)t} dt \end{aligned}$$

il s'agit bien entendu de justifier l'échange $\int \sum = \sum \int$ signalé par le symbole \star : les fonctions $g_{n,k}$ étant positives, il est suffisant de montrer que la série $\sum_k \int_{\mathbb{R}_+} g_{n,k}(t) dt$ converge ce qui se vérifie facilement car après $2n+1$ intégrations par parties nous avons

$$\int_0^\infty g_{n,k}(t) dt = \int_0^\infty t^{2n+1} e^{-(2k+1)t} dt = \frac{(2n+1)!}{(2k+1)^{2n+2}},$$

(les « termes entre crochets » étant nuls). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h_n(t) dt &= \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{k \geq 0} \int_0^\infty t^{2n+1} e^{-(2k+1)t} dt = \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{k \geq 0} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)^{2n+2}} \\ &= 2z^{2n+1} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2n+2}} - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k)^{2n+2}} \right) \\ &= 2z^{2n+1} \left(1 - 2^{-(2n+2)} \right) \zeta(2n+2) \end{aligned}$$

Soit

$$\int_0^\infty |h_n(t)| dt \leq 2|z|^{2n+1} \zeta(2)$$

qui est pour $|z| < 1$ le terme général d'une série convergente, ceci justifie l'échange $\int_{\mathbb{R}_+} \sum_n h_n = \sum_n \int_{\mathbb{R}_+} h_n$, et finalement

$$\int_0^\infty \frac{\text{sh}(zt)}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{n \geq 0} 2 \left(1 - 2^{-(2n+2)} \right) \zeta(2n+2) \cdot z^{2n+1}, \quad \forall |z| < 1.$$

En particulier, avec la question précédente on a

$$\frac{\pi}{2} \tan(\pi z/2) = \sum_{n \geq 0} 2 \left(1 - 2^{-(2n+2)} \right) \zeta(2n+2) \cdot z^{2n+1}, \quad \forall |z| < 1,$$

c'est le développement en série entière de la fonction $D(0,1) \ni z \mapsto \frac{\pi}{2} \tan(\pi z/2)$. □

Commentaire : Il existe bien sûr des méthodes plus élémentaires pour déterminer le développement en série entière de la fonction tangente à l'origine, c'est ici juste une conséquence de la formule de Ramanujan $\int_0^\infty \frac{\text{sh}(zt)}{\text{sh}(t)} dt = \frac{\pi}{2} \tan(\pi z/2)$

Références