Une formule de Ramanujan et le d.s.e. de la fonction tangente

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une formule de Ramanujan et le d.s.e. de la fonction tangente***

Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $|\mathrm{re}(z) := \sigma| < 1$, on considère l'application

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{sh(zt)}{sh(t)}, & si\ t > 0, \\ z, & si\ t = 0. \end{cases}$$

❶ *Montrer que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$ et vérifie*

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n \geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}.$$

❷ *Sachant que*[1]

$$\pi \mathrm{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{n^2 - z^2}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2} \tan(\frac{\pi z}{2}), \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |re(z)| < 1.$$

❸ *En développant f en série entière (pour la variable z) montrer que*

$$\frac{\pi}{2} \tan(\pi z/2) = \int_0^{+\infty} \frac{sh(zt)}{sh(t)} dt = 2 \sum_{`\geq 0} \left(1 - 2^{-2n-2}\right) \zeta(2n+2) z^{2n+1}, \quad \forall\, |z| < 1.$$

1.

Solution : ❶ *Comme* $\lim_{t\to 0_+} f(t) = z = f(0)$, *$f$ est continue à l'origine et donc sur $\mathbb{R}_+$. En outre $|\sigma| < 1$ implique*

$$|f(t)| = \left|\frac{e^{zt} - e^{-zt}}{2sh(t)}\right| \leq \frac{e^{|\sigma t|}}{|sh(t)|} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{(|\sigma|-1)t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

ainsi $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$.
Pour $t > 0$, on peut écrire

$$f(t) = sh(zt)\frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}} = 2e^{-t}sh(zt)\sum_{n\geq 0} e^{-2nt} = \sum_{n\geq 0}\left(e^{(z-2n-1)t} - e^{-(z+2n+1)t}\right) := \sum_{n\geq 0} u_n(t),$$

et les fonctions u_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car (toujours car $|\sigma| < 1$)

$$|u_n(t)| \leq e^{-2nt}\left|e^{(z-1)t} - e^{-(z+1)t}\right| \leq 2e^{-2nt}e^{(|\sigma|-1)t} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Un petit calcul nous donne

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)dt = \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

(bien remarquer que $|\sigma| < 1$ assure que $(2n+1)^2 - z^2 \neq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$). Ainsi, formellement

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n\geq 0} u_n(t)dt = \sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n\geq 0}\frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

il ne reste donc plus qu'à justifier l'échange $\int\sum = \sum\int$ ci-dessus. Pour cela, il faut être délicat car la condition suffisante « la série $\sum_n \int_{\mathbb{R}_+} |u_n(t)|dt$ converge » n'est pas ici réalisée[2] *et il faut se ramener au cadre des suites de fonctions en posant*

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(S_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ et vérifie

$$|S_n(t)| \leq |sh(zt)|\sum_{k=0}^{n} e^{-(2k+1)t} \leq |sh(zt)|\sum_{k\geq 0} e^{-(2k+1)t} = |f(t)| \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

L'hypothèse de domination est donc vérifiée et l'échange $\int\sum = \sum\int$ est justifié, CQFD.

❷ *Il suffit d'un peu de patience et d'attention. Avec la question précédente nous avons pour $|\mathrm{re}(z)| < 1$ et $z \neq 0$ (si $z = 0$ il n'y a rien à démontrer)*

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)dt &= \sum_{n\geq 0}\frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{2z}{n^2 - z^2} - \sum_{n\geq 0}\frac{2z}{(2n)^2 - z^2} \\
&= -\frac{2}{z} + \sum_{n\geq 1}\frac{2z}{n^2 - z^2} + \frac{2}{z} - \sum_{n\geq 1}\frac{2z}{(2n)^2 - z^2} \\
&= -\frac{1}{z} - \sum_{n\geq 1}\frac{2z}{z^2 - n^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1}\frac{z/2}{(z/2)^2 - n^2} \\
&= -\pi cotan(\pi z) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z} + \sum_{n\geq 1}\frac{z}{(z/2)^2 - n^2}\right) \\
&= -\pi cotan(\pi z) + \frac{\pi}{2}cotan(\pi z/2) \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos^2(\pi z/2) - \cos(\pi z)}{\cos(\pi z/2)\sin(\pi z/2)} \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin^2(\pi z/2)}{\cos(\pi z/2)\sin(\pi z/2)} = \frac{\pi}{2}\tan(\pi z/2).
\end{aligned}$$

❸ *Pour $t \geq 0$ on a*

$$f(t) = \frac{sh(zt)}{sh(t)} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n+1} z^{2n+1}}{sh(t)(2n+1)!} := \sum_{n\geq 0} h_n(t).$$

Les applications h_n sont clairement dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ et nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h_n(t)dt &= \int_0^\infty \frac{t^{2n+1}z^{2n+1}}{sh(t)(2n+1)!}dt \\ &= \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^\infty \sum_{k\geq 0} t^{2n+1}e^{-(2k+1)t}dt = \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^\infty \sum_{k\geq 0} g_{n,k}(t)dt \\ &\underset{✘}{=} \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k\geq 0}\int_0^\infty t^{2n+1}e^{-(2k+1)t}dt\end{aligned}$$

il s'agit bien entendu de justifier l'échange $\int\sum = \sum\int$ signalé par le symbole ✘ *: les fonctions $g_{n,k}$ étant postives, il est suffisant de montrer que la série $\sum_k \int_{\mathbb{R}_+} g_{n,k}(t)dt$ converge ce qui se vérifie facilement car aprés $2n+1$ intégrations par parties nous avons*

$$\int_0^\infty g_{n,k}(t)dt = \int_0^\infty t^{2n+1}e^{-(2k+1)t}dt = \frac{(2n+1)!}{(2k+1)^{2n+2}},$$

(les « termes entre crochets » étant nuls). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h_n(t)dt &= \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k\geq 0}\int_0^\infty t^{2n+1}e^{-(2k+1)t}dt = \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k\geq 0}\frac{(2n+1)!}{(2k+1)^{2n+2}} \\ &= 2z^{2n+1}\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2n+2}} - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2n+2}}\right) \\ &= 2z^{2n+1}\left(1-2^{-(2n+2)}\right)\zeta(2n+2)\end{aligned}$$

Soit

$$\int_0^\infty |h_n(t)|dt \leq 2|z|^{2n+1}\zeta(2)$$

qui est pour $|z| < 1$ le terme général d'une série convergente, ceci justifie l'échange $\int_{\mathbb{R}_+}\sum_n h_n = \sum_n \int_{\mathbb{R}_+} h_n$, et finalement

$$\int_0^\infty \frac{sh(zt)}{sh(t)}dt = \sum_{n\geq 0} 2\left(1-2^{-(2n+2)}\right)\zeta(2n+2)\cdot z^{2n+1}, \quad \forall\,|z|<1.$$

En particulier, avec la question précédente on a

$$\frac{\pi}{2}\tan(\pi z/2) = \sum_{n\geq 0} 2\left(1-2^{-(2n+2)}\right)\zeta(2n+2)\cdot z^{2n+1}, \quad \forall\,|z|<1,$$

c'est le développement en série entière de la fonction $D(0,1) \ni z \mapsto \dfrac{\pi}{2}\tan(\pi z/2)$. ❏

Commentaire : *Il existe bien sûr des méthodes plus élémentaires pour déterminer le développement en série entière de la fonction tangente à l'origine, c'est ici juste une conséquence de la formule de Ramanujan* $\int_0^{\infty} \frac{sh(zt)}{sh(t)} dt = \frac{\pi}{2} \tan(\pi z/2)$

Références