Le lemme de Cantor

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Le lemme de Cantor***

❶ *Soient* $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ *deux suites de nombres réels telles que la suite de fonctions* $(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction nulle. Montrer que* $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ *(**lemme de Cantor**).*

❷ *Montrer que la conclusion subsiste si la convergence simple à lieu seulement sur un intervalle* $[a, b]$ *(où* $a < b$*).*

Solution : ❶ *Avec* $x = 0$ *on a déja* $\lim_n a_n = 0$*. Vu l'hypothèse, on a alors* $\lim_n b_n \sin(nx) = 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ *; supposons que* $(b_n)_n$ *ne converge pas vers zéro : il existe alors* $\varepsilon > 0$*, une suite strictement croissante d'entiers* $(n_k)_k$ *vérifiant pour tout* k *:* $|b_{n_k}|\geq\varepsilon$*. Mais alors, puisque* $(b_{n_k}\sin(n_kx))_k$ *converge simplement vers zéro sur* $\mathbb{R}$ *la suite* $(\sin(n_kx))_k$ *est nécessairement simplement convergente vers zéro sur* $\mathbb{R}$*, en outre* $0\leq\sin^2(n_kx)\leq 1\in L^1([0,2\pi])$*. On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée :*

$$\lim_k \int_0^{2\pi} \sin^2(n_kx)dx = 0,$$

cependant, d'un autre côté on a aussi

$$\int_0^{2\pi}\sin^2(n_kx)dx = \int_0^{2\pi}(1-\cos(2n_kx))\,\frac{dx}{2} = \pi$$

d'où la contradiction et $\lim_n b_n = 0$*.*

❷ ***Cas général :*** *Supposons maintenant la convergence simple seulement sur un intervalle* $[a, b]$*. Si par exemple la suite* $(a_k)_k$ *ne converge pas vers* 0*, on considère comme dans la première partie* $\varepsilon > 0$ *et une sous-suite* $(a_{n_k})_k$ *tels que* $|a_{n_k}|\geq\varepsilon$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$*. Alors pour tout* $x\in[a,b]$ *:*

$$|f_{n_k}(x)| := \left|\frac{(a_{n_k}\cos(n_kx)+b_{n_k}\sin(n_kx))^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\right| \leq \left|\frac{(a_{n_k}\cos(n_kx)+b_{n_k}\sin(n_kx))^2}{\varepsilon^2}\right|.$$

et la suite $(f_{n_k})_k$ *est simplement convergente sur* $[a, b]$*. En outre, vu l'inégalité (Cauchy-Schwarz par exemple)* $ax+by\leq\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$ *nous avons aussi la domination :*

$$|f_{n_k}(x)| \leq \frac{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2} = 1, \quad \forall\, x\in[a,b],\ k\in\mathbb{N}.$$

Donc, par convergence dominée

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_{n_k}(x)dx = 0(\bigstar).$$

Mais par un calcul direct

$$\begin{aligned}\int_a^b f_{n_k}(x)dx &= \frac{1}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}\int_a^b \left(a_{n_k}^2(1+\cos(2n_kx))+b_{n_k}^2(1-\cos(2n_kx))+2a_{n_k}b_{n_k}\sin(2n_kx)\right)dx\\ &= \frac{b-a}{2}+\frac{a_{n_k}^2-b_{n_k}^2}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}\int_a^b\cos(2n_kx)dx+\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\int_a^b\sin(2n_kx)dx\\ &:= \frac{b-a}{2}+\frac{a_{n_k}^2-b_{n_k}^2}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}I_k+\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}J_k\end{aligned}$$

mais bien entendu

$$\lim_{k\to\infty}I_k=\lim_{k\to\infty}J_k=0$$

et

$$\left|\frac{a_{n_k}^2-b_{n_k}^2}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}\right|\leq\frac{1}{2}\quad et\quad\left|\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

donc

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{n_k}^2-b_{n_k}^2}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}I_k\right|+\left|\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}J_k\right|\leq\frac{1}{2}\left(|I_k|+|J_k|\right)=0$$

soit

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_{n_k}(x)dx=\frac{b-a}{2}>0$$

contredisant ($\bigstar$) *: l'affaire est donc entendue (on procède de même si c'est la suite* $(b_n)_n$ *ne converge pas vers zéro).* ❏

Références