Étude de la suite $\left(\int_0^\infty n \log\left(1+n^{-\alpha} f^\alpha(t)\right) dt\right)_n$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ **_Étude de la suite_** $\left(\int_0^\infty n \log\left(1+n^{-\alpha} f^\alpha(t)\right) dt\right)_n$
([1], 1999/00).
Pour $f \in L^1(\mathbb{R}_+),\ \alpha \geq 1,\ n \geq 1$ *on pose*

$$I_n := \int_0^\infty n \log\left(1+n^{-\alpha} f^\alpha(t)\right) dt.$$

Après avoir justifié l'existence de I_n*, étudier la convergence de la suite* $(I_n)_n$.

Solution : *Notons* $\varphi_n(t) = n \log\left(1+n^{-\alpha} f^\alpha(t)\right)$*, remarquons que pour tout* $\alpha \geq 1$ *et* $t \geq 0$ *:*

$$1 + t^\alpha \leq (1+t)^\alpha,$$

ainsi

$$0 \leq \varphi_n(t) \leq n\alpha \log\left(1+n^{-1} f(t)\right) \leq \alpha f(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) (\text{✘})$$

la dernière inégalité résultant de l'archi-classique $\log(1+u) \leq u$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *i.e. pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star, \varphi_n \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *et notre suite est bien définie.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+$ *fixé, si* $f(x) \neq 0$ *alors* $\varphi_n(x) \sim n^{1-\alpha} f^\alpha(t) \to 0$ *pour* $n \to \infty$ *si* $\alpha > 1$*. Ainsi pour* $\alpha > 1$ *la suite* $(\varphi_n)_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$ *vers la fonction nulle. Pour* $\alpha = 1$ *elle est simplement convergente sur* $\mathbb{R}_+$ *vers* f*. Ceci et (✘) nous permet dans les deux cas d'appliquer le théorème de la convergence dominée, soit finallement*

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ \int_0^\infty f(t)dt & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

❑

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.