

# Limite en 0, $\pm\infty$ de $\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

## ■ **Exercice 0.1** ■ ★ ■ **Limite en 0, $\pm\infty$ de $\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$** ■

[1]

Montrer que si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

si de plus  $f$  est sans zéros dans  $[a, b]$  déterminer les limites suivantes

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \& \quad \lim_{p \rightarrow -\infty} \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

**Solution :** ⇔ Il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $M := |f(c)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ , on a immédiatement

$$\left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left( \int_a^b M^p dt \right)^{1/p} = M(b-a)^{1/p}, (\star)$$

De l'autre côté, par continuité de  $f$  et étant donné  $\varepsilon > 0$ , il existe  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  tel que  $|f(x)| \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$  sur  $[\alpha, \beta]$ . Alors

$$\left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \geq \left( \int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \geq (M - \frac{\varepsilon}{2})(\beta - \alpha)^{1/p}$$

Ainsi, vu  $(\star)$ , on a pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$(M - \frac{\varepsilon}{2})(\beta - \alpha)^{1/p} \leq \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq M(b-a)^{1/p}$$

d'où le résultat en faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$  ( $\varepsilon > 0$  étant arbitraire).

⇔ De la première limite on déduit aussitôt (si  $f$  est sans zéros) que

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} = \min_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

↔ Reste la limite en zéro. On peut écrire

$$\log \left( \frac{\left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}}{b-a} \right) = \frac{1}{p} \log \left( \frac{\int_a^b |f(t)|^p dt}{b-a} \right) = \frac{1}{p} \log \left( \frac{\int_a^b g(t,p) dt}{b-a} \right) := \frac{h(p) - h(0)}{p}$$

↔ vu les théorèmes classiques sur la continuité et la dérivabilité des intégrales à paramètres on vérifie sans peine que  $h$  est dérivable à l'origine, on peut dériver sous l'intégrale, si bien que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \log \left( \frac{\left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}}{b-a} \right) = h'(0) = \int_a^b \log(f(t)) dt.$$

□

## Références

- [1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Integration, volume 3 of Student Mathematical Library. AMS, 2003.