Autour de l'inégalité de Jensen

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

5 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Autour de l'inégalité de Jensen***

①

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe. Montrer que

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans I, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

②

Cas d'égalité dans l'inégalité de Jensen. *On suppose f strictement convexe (i.e. $x \neq y$ implique $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$), montrer que si*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

alors $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

③

*Supposons f Riemann intégrable sur $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Si φ est continue et convexe sur $[m, M]$, démontrer l'**inégalité de Jensen***

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\left(f(t)\right)dt.$$

Références