Sommes de Riemann et formule de Taylor

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sommes de Riemann et formule de Taylor***

①

Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$ *montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

②

Si f *est deux fois dérivable sur* $[0,1]$ *et si* f'' *est bornée et intégrable sur* $[0,1]$, *montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{n}\right)\right) = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

Solution : ❶ *Commencons par observer que*

$$\begin{aligned}
n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt\right) &= n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt\right)\\
&= n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)dt\\
&= n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\zeta_k(t))\left(\frac{k}{n}-t\right)dt,
\end{aligned}$$

Et si on pose pour $1 \leq k \leq n$

$$m_k := \inf\left\{f'(x)\ :\ x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right\}$$

$$M_k := \sup\left\{f'(x)\ :\ x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right\}$$

on obtient

$$m_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - t\right) dt \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\zeta_k(t)) \left(\frac{k}{n} - t\right) dt \leq M_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - t\right) dt$$

soit finalement

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} m_k \leq n \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\zeta_k(t)) \left(\frac{k}{n} - t\right) dt \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} M_k$$

mais

$$\frac{1}{2} \int_0^1 f'(t) dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} M_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} m_k$$

car on y reconnait dans les deux termes de gauche deux sommes de Riemann associées à la fonction f' *sur* $[0,1]$. *C.Q.F.D.*

❷ *Pour la seconde limite, la technique est la même mais il faut bien entendu pousser plus loin le développement : avec Taylor-Lagrange, nous avons*

$$f(x) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) = f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\zeta_i(x)\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right)^2.$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} n^2 \left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{n}\right)\right) &= n^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right) dt \\ &= n^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right) dx \\ &\quad + \frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f''\left(\zeta_i(x)\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que chacunes des intégrales

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right) dx$$

s'annulent. Quant aux suivantes, en raisonnant comme dans la première partie

$$\frac{1}{24n} \sum_{i=1}^{n} m_i \leq \frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f''\left(\zeta_i(x)\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 dx \leq \frac{1}{24n} \sum_{i=1}^{n} M_i$$

où M_i *(resp.* m_i*) désigne la borne supérieure (resp. inférieure) de* f'' *sur l'intervalle* $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$. f'' *étant continue on conclut rapidement comme plus haut.* ❑

Références