Une caractérisation de la fonction Gamma : le théorème de Bohr-Mollerup

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une caractérisation de la fonction Gamma : le théorème de Bohr-Mollerup***

Soit pour

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

①

Montrer que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)},\ x>0.$

②

Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt,\ x>0.$$

③

En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)},\ x>0.$$

④

Montrer que $\log\Gamma$ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

⑤

Réciproquement soit $f\,:\,\mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ *une application log-convexe vérifiant*

$$f(1)=1 \quad et \quad \forall\, x>0,\ f(x+1)=xf(x).$$

Montrer que $f=\Gamma$ *(théorème de Bohr-Mollerup)*

Références