Étude de $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt, \quad J_\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha+\sin(t)}dt \quad \& \quad S_\alpha = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Étude de*** $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt, \quad J_\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha+\sin(t)}dt \quad \& \quad S_\alpha = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Pour $2 > \alpha > 0$ étudier la convergence et l'absolue convergence des intégrales impropres ou séries

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt \quad \& \quad J_\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha + \sin(t)}dt \quad \& \quad S_\alpha = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

Solution : ❶ *Notons $f(t) = \sin(t)t^{-\alpha}$. I_α est une intégrale impropre à l'origine et à l'infini. À l'origine, f est équivalente à $t^{-\alpha+1}$ fonction positive, de type Riemann, intégrable en $t = 0$ puisque $-\alpha + 1 < -1$. En outre $|f(t)| \leq t^{-\alpha}$ fonction intégrable à l'infini pour $\alpha > 1$:* ***la convergence absolue de $\mathbf{I}_\alpha$ est donc établie pour*** $2 > \alpha > 1$***.***

Reste donc le cas $0 < \alpha \leq 1$; vu ce qui précède (tout se passant bien à l'origine) il sera suffisant d'étudier la convergence sur $[1, +\infty[$. Pour cela on fait une intégration par parties (avec la convention habituelle qu'elle sera réellement correcte si deux termes parmi les trois existent, sinon, travailler sur $[1, A]$ puis faire tendre A vers $+\infty$...)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt = \left[\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha\cos(t)}{t^{\alpha+1}}dt$$

et

$$\left[\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right]_1^{+\infty} = -\cos(1), \quad \left|\frac{\alpha\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \in L^1([1, +\infty[)$$

assurent alors ***la convergence de $\mathbf{I}_\alpha$ pour $\mathbf{0} < \alpha \leq \mathbf{1}$.***

Pour la convergence absolue en $+\infty$ si $0 < \alpha \leq 1$, le plus simple est de remarquer que

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \geq \left|\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}\right| \geq \frac{1}{t^\alpha} - \frac{\cos(2t)}{t^\alpha} = g(t) - h(t)$$

en raisonnant comme au dessus h est intégrable en $+\infty$ mais bien sûr g ne l'est pas, et l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|dt$ ***diverge pour tout*** $\mathbf{0<\alpha\le 1}$.

Il est aussi classique de conclure par la minoration

$$\int_0^{(2n+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|dt \ge \sum_{k=0}^{n}\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}}\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|dt \ge \sum_{k=0}^{n}\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2\left((2k+1)\pi\right)^\alpha}dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{\pi\sqrt{2}}{4\left((2k+1)\pi\right)^\alpha}$$

cette dernière quantité tendant vers l'infini avec n comme somme partielle d'une série de terme général équivalent à $Ck^{-\alpha}$ donc divergente...

❷ *Le problème est toujours à l'infini où notre fonction n'est pas de signe constant, donc pas question d'utiliser les équivalents, le dernier recours (le développement asymptotique) montre ici toute sa puissance*

$$\frac{\sin(t)}{t^\alpha+\sin(t)} = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\left(\frac{1}{1+t^{-\alpha}\sin(t)}\right) = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\left(1-\frac{\sin(t)}{t^\alpha}+o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right) = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}-\frac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

$$= g(t)+h(t) \qquad \text{où} \quad g(t)=\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad h(t) = -\frac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

vu 2) la fonction g est intégrable à l'infini pour tout $\alpha>0$, par contre

$$h(t)\sim\frac{-\sin^2(t)}{t^{2\alpha}} = \frac{1}{2t^{2\alpha}}-\frac{\cos(2t)}{2t^{2\alpha}}$$

le sera si et seulement si $\alpha>1/2$. La seconde intégrale est donc convergente si et seulement si $\alpha>1/2$. Il est bien de remarquer que pour tout $\alpha>0$:

$$\frac{\sin(t)}{t^\alpha+\sin(t)}\sim\frac{\sin(t)}{t^\alpha}$$

la première étant intégrable si et seulement si $\alpha>1/2$, et la seconde, si et seulement si $\alpha>0$: L'intégrabilité ne passe donc pas à l'équivalent lorsque les fonctions ne sont pas de signe constant.

❷ *C'est la version série du second exemple et se traite de la même manière.* ❑

Remarques : *L'étude de la série donne*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\sim\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

pour tout $\alpha>0$ et comme plus haut, pour $0<\alpha\le 1/2$, $\sum_n u_n$ diverge, ce qui peut donner lieu à deux remarques :

➪ *La première est un contre-exemple pour le théorème sur les équivalents lorsque les séries ne sont pas de signe constant (puisque la série de terme général $(-1)^n n^{-\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha>0$).*

➪ *La seconde, est que $\sum_n u_n$ étant alternée, divergente et son terme général tendant vers zéro :* $v_n = \left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\right|$ *ne décroit pas vers zéro (vu le théorème des les séries alternées). Toutefois $v_n\sim n^{-\alpha}$ i.e. la monotonie non plus ne passe pas à l'équivalent.*

Références