Autour du théorème des moments de Hausdorff

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Autour du théorème des moments de Hausdorff***

❶ *Soit $f \in C([a,b])$ telle que $\int_a^b f(t)t^n dt = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle (**théorème des moments de Hausdorff**).*

❷ **le théorème des moments de Hausdorff tombe en défaut sur $\mathbb{R}^+$:** *Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par*

$$f(x) = e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})$$

➪ *Montrer que*

$$I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t} dt = \frac{n!}{\omega^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{où } \omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

➪ *En déduire que*

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(pour cela, remarquer que $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$...).

❸ *Soit $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}^0([-a,a])$. Si*

$$\int_{-a}^{a} t^n f(t) dt = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

montrer que f impaire sur $[-a,a]$. De même, si

$$\int_{-a}^{a} t^{2n+1} f(t) dt = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

montrer que f paire sur $[-a,a]$.

Solution : ❶ *Soit f une telle fonction, avec la linéarité de l'intégrale on a*

$$\int_a^b f(t)P(t) dt = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X],$$

mais par le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_n \subset \mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, et par convergence uniforme sur $[a,b]$

$$\int_a^b f^2(t)dt = \int_a^b \lim_n f(t)P_n(t)dt = \lim_n \int_a^b f(t)P_n(t)dt = 0$$

soit (f^2 est continue et positive) $f \equiv 0$.

❷ *Pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\left|t^n e^{-\omega t}\right| = t^n \exp(-\frac{t\sqrt{2}}{2}) \in L^1(\mathbb{R})$$

et l'intégrale I_n est bien convergente ; en outre, si $n \geq 1$ une intégration par parties donne

$$I_n = \omega^{-1}\left[-t^n e^{-\omega t}\right]_0^\infty + \frac{n}{\omega}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\omega t}dt = \frac{n}{\omega}I_{n-1}$$

soit

$$I_n = \frac{n!}{\omega^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Et puisque pour $n \geq 1$: $\omega^{4(n+1)} = (-1)^{n+1}$ au vu du calcul précédent

$$I_{4n+3} \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

sa partie imaginaire est donc toujours nulle i.e.

$$\begin{aligned} 0 = im(I_{4n+3}) &= \int_0^\infty t^{4n+3}\exp(-\frac{t\sqrt{2}}{2})\sin(\frac{t\sqrt{2}}{2})dt \\ &= \int_0^\infty x^n \sin(x^{1/4})\exp(-x^{1/4})dx \quad (\textit{poser } x = t^4/4) \\ &= \int_0^\infty x^n f(x)dx \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

d'où le contrexemple désiré.

❷ ➪ *Commencons par remarquer que, vu les hypothèses sur f*

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a (f(t)+f(-t))\,t^{2n}dt &= \int_{-a}^a f(t)t^{2n}dt + \int_{-a}^a f(-t)(-t)^{2n}dt \\ &= 2\int_{-a}^a f(t)t^{2n}dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{-a}^a (f(t)+f(-t))\,t^{2n+1}dt = \int_{-a}^a f(t)t^{2n+1}dt - \int_{-a}^a f(-t)(-t)^{2n+1}dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'application continue sur $[-a,a]$, $g(t)=f(t)-f(-t)$ vérifie donc

$$\int_{-a}^{a} f(t)t^n dt = 0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

elle est donc (vu la première question) identiquement nulle : f est bien impaire.

➪ *La procédure est identique pour le second cas.*

❑

Remarques : ➪ *Pour la première question, on est pas obligé d'utiliser Weierstrass, on peut procéder de la manière suivante : soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$ une application vérifiant $\int_0^1 t^n f(t)dt = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale $\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0, \quad \forall\, P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons un instant que f ne soit pas identiquement nulle sur $[0,1]$: par continuité, il existe $0 < c < 1$ tel que $f(c) \neq 0$ (et même $f(c) > 0$ quitte à remplacer f par $-f$) ; il existe aussi $0 < a < c < b < 1$ tels $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$, $\forall\, x \in [a,b]$. Alors, le polynôme $P(t) = 1 + (X-a)(b-X)$ vérifie $P(t) \geq 1$ sur $[a,b]$ et $0 \leq P(t) \leq 1$ sur $[0,1] \setminus [a,b]$. On a aussi $P' > 0$ sur $[0,a]$ par compacité de ce dernier intervalle, il existe $\lambda > 0$ tel que $P'(t) \geq \lambda > 0$. Ainsi, en posant $M = \sup_{[0,1]} |f(t)|$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned}\left|\int_0^a P^n(t)f(t)dt\right| &\leq M\int_0^a P^n(t)dt \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^a P'(t)P^n(t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{P^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^a = \frac{1-(1-ab)^{n+1}}{\lambda(n+1)} \leq \frac{1}{\lambda(n+1)}\end{aligned}$$

et en procédant de même sur $[b,1]$ on peut donc affirmer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a P^n(t)f(t)dt = 0, \quad \& \quad \lim_{n\to\infty}\int_b^1 P^n(t)f(t)dt = 0. (✘)$$

Par contre, sur $[a,b]$, et avec ce choix de P nous avons

$$\int_a^b P^n(t)f(t)dt \geq \int_a^b f(t)dt \geq \frac{b-a}{2}f(c) > 0. (✔)$$

Les formules (✘) et (✔) impliquent que $\int_0^1 P^n(t)f(t)dt > 0$ pour tout entier n suffisament grand, fait parfaitement absurde puisque $\int_0^1 Q(t)f(t)dt = 0, \quad \forall\, Q \in \mathbb{R}[X]$.

➪ *Utilisez correctement le théorème de Weierstrass, en particulier sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$ toute fonction continue sur un compact K y est limite uniforme de polynômes en x et y (i.e. $\in \mathbb{C}[x,y]$) et non en $z = x+iy$ (i.e. $\in \mathbb{C}[z]$) . Le contre exemple canonique (bien connu des amateurs de fonctions holomorphes) étant la fonction continue sur $\mathbb{C}^\star$: $f(z) = z^{-1}$, pour laquelle il n'existe pas de suite de polynômes $(P_n)_n \subset \mathbb{C}[z]$ convergeant uniformément vers f sur le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}^\star$; en effet en passant par exemple en coordonnées polaires on vérifie facilement que*

$$\int_{S^1} f(z)dz = 2i\pi \quad \text{alors que} \quad \int_{S^1} P_n(z)dz = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Références