Autour du théorème des moments de Hausdorff

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

23 avril 2024

Exercice 0.1 ★ Autour du théorème des moments de Hausdorff

❶ Soit $f \in C([a, b])$ telle que $\int_a^b f(t)t^n dt = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle (théorème des moments de Hausdorff).

❷ le théorème des moments de Hausdorff tombe en défaut sur $\mathbb{R}^+$: Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})$$

⇨ Montrer que

$$I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t} dt = \frac{n!}{\omega^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{où } \omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

⇨ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(pour cela, remarquer que $I_{4n+3} \in \mathbb{R} \dots$).

❸ Soit $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([-a, a])$. Si

$$\int_{-a}^a t^n f(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

montrer que f impaire sur $[-a, a]$. De même, si

$$\int_{-a}^a t^{2n+1} f(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

montrer que f paire sur $[-a, a]$.

Solution : ❶ Soit f une telle fonction, avec la linéarité de l'intégrale on a

$$\int_a^b f(t)P(t)dt = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X],$$

mais par le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_n \subset \mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , et par convergence uniforme sur $[a, b]$

$$\int_a^b f^2(t)dt = \int_a^b \lim_n f(t)P_n(t)dt = \lim_n \int_a^b f(t)P_n(t)dt = 0$$

soit (f^2 est continue et positive) $f \equiv 0$.

② Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|t^n e^{-\omega t}| = t^n \exp\left(-\frac{t\sqrt{2}}{2}\right) \in L^1(\mathbb{R})$$

et l'intégrale I_n est bien convergente; en outre, si $n \geq 1$ une intégration par parties donne

$$I_n = \omega^{-1} [-t^n e^{-\omega t}]_0^\infty + \frac{n}{\omega} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\omega t} dt = \frac{n}{\omega} I_{n-1}$$

soit

$$I_n = \frac{n!}{\omega^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Et puisque pour $n \geq 1$: $\omega^{4(n+1)} = (-1)^{n+1}$ au vu du calcul précédent

$$I_{4n+3} \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sa partie imaginaire est donc toujours nulle i.e.

$$\begin{aligned} 0 = \text{im}(I_{4n+3}) &= \int_0^\infty t^{4n+3} \exp\left(-\frac{t\sqrt{2}}{2}\right) \sin\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}\right) dt \\ &= \int_0^\infty x^n \sin(x^{1/4}) \exp(-x^{1/4}) dx \quad (\text{poser } x = t^4/4) \\ &= \int_0^\infty x^n f(x) dx \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

d'où le contreexemple désiré.

② $\Leftrightarrow$ Commençons par remarquer que, vu les hypothèses sur f

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a (f(t) + f(-t)) t^{2n} dt &= \int_{-a}^a f(t) t^{2n} dt + \int_{-a}^a f(-t) (-t)^{2n} dt \\ &= 2 \int_{-a}^a f(t) t^{2n} dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{-a}^a (f(t) + f(-t)) t^{2n+1} dt = \int_{-a}^a f(t) t^{2n+1} dt - \int_{-a}^a f(-t) (-t)^{2n+1} dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'application continue sur $[-a, a]$, $g(t) = f(t) - f(-t)$ vérifie donc

$$\int_{-a}^a f(t)t^n dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

elle est donc (vu la première question) identiquement nulle : f est bien impaire.

⇔ La procédure est identique pour le second cas.

□

Remarques : ⇔ Pour la première question, on est pas obligé d'utiliser Weierstrass, on peut procéder de la manière suivante : soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ une application vérifiant $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale $\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons un instant que f ne soit pas identiquement nulle sur $[0, 1]$: par continuité, il existe $0 < c < 1$ tel que $f(c) \neq 0$ (et même $f(c) > 0$ quitte à remplacer f par $-f$) ; il existe aussi $0 < a < c < b < 1$ tels $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}, \forall x \in [a, b]$. Alors, le polynôme $P(t) = 1 + (X - a)(b - X)$ vérifie $P(t) \geq 1$ sur $[a, b]$ et $0 \leq P(t) \leq 1$ sur $[0, 1] \setminus [a, b]$. On a aussi $P' > 0$ sur $[0, a]$ par compacité de ce dernier intervalle, il existe $\lambda > 0$ tel que $P'(t) \geq \lambda > 0$. Ainsi, en posant $M = \sup_{[0,1]} |f(t)|$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a P^n(t)f(t)dt \right| &\leq M \int_0^a P^n(t)dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^a P'(t)P^n(t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{P^{n+1}(t)}{n+1} \right]_0^a = \frac{1 - (1 - ab)^{n+1}}{\lambda(n+1)} \leq \frac{1}{\lambda(n+1)} \end{aligned}$$

et en procédant de même sur $[b, 1]$ on peut donc affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a P^n(t)f(t)dt = 0, \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_b^1 P^n(t)f(t)dt = 0. (\mathbf{x})$$

Par contre, sur $[a, b]$, et avec ce choix de P nous avons

$$\int_a^b P^n(t)f(t)dt \geq \int_a^b f(t)dt \geq \frac{b-a}{2} f(c) > 0. (\mathbf{v})$$

Les formules $(\mathbf{x})$ et $(\mathbf{v})$ impliquent que $\int_0^1 P^n(t)f(t)dt > 0$ pour tout entier n suffisamment grand, fait parfaitement absurde puisque $\int_0^1 Q(t)f(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}[X]$.

⇔ Utilisez correctement le théorème de Weierstrass, en particulier sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$ toute fonction continue sur un compact K y est limite uniforme de polynômes en x et y (i.e. $\in \mathbb{C}[x, y]$) et non en $z = x + iy$ (i.e. $\in \mathbb{C}[z]$) . Le contre exemple canonique (bien connu des amateurs de fonctions holomorphes) étant la fonction continue sur $\mathbb{C}^*$: $f(z) = z^{-1}$, pour laquelle il n'existe pas de suite de polynômes $(P_n)_n \subset \mathbb{C}[z]$ convergeant uniformément vers f sur le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}^*$; en effet en passant par exemple en coordonnées polaires on vérifie facilement que

$$\int_{S^1} f(z)dz = 2i\pi \quad \text{alors que} \quad \int_{S^1} P_n(z)dz = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Références