Autour du théorème des moments de Hausdorff

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

5 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Autour du théorème des moments de Hausdorff***

❶ *Soit $f \in C([a,b])$ telle que $\int_a^b f(t)t^n dt = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle (**théorème des moments de Hausdorff**).*

❷ **le théorème des moments de Hausdorff tombe en défaut sur $\mathbb{R}^+$:** *Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par*

$$f(x) = e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})$$

➪ *Montrer que*

$$I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t} dt = \frac{n!}{\omega^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{où } \omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

➪ *En déduire que*

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(pour cela, remarquer que $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$...).

❸ *Soit $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}^0([-a,a])$. Si*

$$\int_{-a}^{a} t^n f(t) dt = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

montrer que f impaire sur $[-a,a]$. De même, si

$$\int_{-a}^{a} t^{2n+1} f(t) dt = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

montrer que f paire sur $[-a,a]$.

Références