Étude de la suite $(u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^2})_n$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Étude de la suite*** $(u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^2})_n$ *[1].*

Convergence et limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^2}.$$

Solution : *Ecrivons*

$$u_n = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\right) = n\left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right)$$

où $f(t) = (1+t)^{-2}$*. En posant pour* $0 < x < 1,\ F(x) = \int_0^x f(t)dt$*, on peut écrire cette dernière expression sous la forme :*

$$\begin{aligned} u_n = n\left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right) &= n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{k+1/n} f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n F'(\frac{k}{n})dt\right) \\ &= f(0) - f(1) + n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{k+1/n} f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F'(\frac{k}{n})\right) \\ &= f(0) - f(1) + n\left(\sum_{k=0}^{n-1} F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})\right) \end{aligned}$$

la formule de Taylor-Lagrange appliquée à F *à l'ordre 2 nous assure que*

$$F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2n^2}F''(\zeta_{n,k}) \quad \text{où} \quad \zeta_{n,k} \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$$

et finalement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = f(0) - f(1) + \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F''(\zeta_{n,k}) = f(0) - f(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 F"(t)dt = \frac{3}{8}$$

la dernière limite étant justifiée puisque l'on y reconnaît la somme de Riemann de la fonction continue F'' associée à la subdivision $\{\frac{k}{n}\}_{k=0}^{n}$ en les points $\left(\zeta_{k,n} \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[\right)_k$. ❑

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.