Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ (5),

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ **Calcul de l'intégrale de Cauchy** $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ (5),
 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x \cos(t)} \cos(x \sin(t)) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

En déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Solution : $\Leftrightarrow$ Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{-x \cos(t)} \cos(x \sin(t)) dt &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-x \cos(t)} e^{ix \sin(t)} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-xe^{-it}} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n e^{-int}}{n!} dt \right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Re}(e^{-int}) dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)! t} dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)! t} dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Les deux échanges $\int \sum = \sum \int$ sont justifiés par la normale convergence des deux séries entières sur le domaine d'intégration (leur rayon de convergence étant infini).

⇔ Une convergence dominée élémentaire¹ ($|e^{-x \cos(t)} \cos(x \sin(t))| \leq 1 \in L^1([0, \pi/2])$) implique

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-x \cos(t)} \cos(x \sin(t)) dt = 0,$$

soit, vu la formule établie au dessus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right) = 0$$

on retrouve bien la valeur de l'intégrale de Cauchy $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. □

Références