Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ (5)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ (5)***

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}dt$. Préciser le domaine de définition de F, étudier la continuite et l'existence des dérivées premières et secondes ; exprimer $F(x)$ en fonction de $C := \int_0^\infty \dfrac{\sin(t)}{t}dt$ et en déduire la valeur de C.

Solution : *L'intégrale définissant F est clairement convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$: F est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire. Posons $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}$.*

➪ *Soit $a > 0$, pour $x \in [-a,a]$ et $t \in \mathbb{R}_+$ on a*

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(xt)}{t} \cdot \frac{1}{t^2+1}\right| \leq \frac{|x|}{t^2+1} \leq \frac{a}{t^2+1} \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

vu la régularité de f le théorème de continuité des intégrales à paramètres assure que $F \in \mathscr{C}^0([-a,a])$, et ceci pour tout $a > 0$: F est donc continue sur $\mathbb{R}$.

➪ $\partial_x f(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{t^2+1}$, *on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$*

$$|\partial_x f(x,t)| = \left|\frac{\cos(xt)}{t^2+1}\right| \leq \frac{1}{t^2+1} \in L^1(\mathbb{R}),$$

par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2+1}dt$.

➪ *Pour l'existence de la dérivée seconde l'affaire est plus délicate, car*

$$\left|\partial_x^2 f(x,t)\right| = \left|\frac{-t\sin(xt)}{t^2+1}\right| \underset{t\to\infty}{\sim} \left|\frac{\sin(xt)}{t}\right|,$$

et cette dernière n'est (comme $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$) pas intégrable en $+\infty$: toute tentative de domination (même locale) pour appliquer le théorème précédent est donc vaine. L'astuce constiste par une *intégration par parties à écrire F' sous une forme acceptable pour justifier la dérivation sous l'intégrale :soit $x \in \mathbb{R}^\star$:*

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2+1}dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x(t^2+1)}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2t\sin(xt)}{x(t^2+1)^2}dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{2t\sin(xt)}{x(t^2+1)^2}dt.$$

Ainsi, pour $x \neq 0$ on a

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2+1}dt = \int_0^\infty \frac{2t\sin(xt)}{x(t^2+1)^2}dt(\text{✘})$$

sous cette seconde forme, on va pouvoir appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, en effet soit $a > 0$, pour $x \geq a$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2t}{x}\cdot\frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2}\right)\right| \leq \left|\frac{2t}{x^2}\cdot\frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2}\right| + \left|\frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right|$$
$$\leq \frac{|2t|}{a^2(t^2+1)^2} + \frac{2t^2}{a(t^2+1)^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

on peut donc dériver sous l'intégrale : F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et

$$F''(x) = \int_0^\infty \left(-\frac{2t}{x^2}\cdot\frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right)dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^\star.$$

Cette expression est un peu chargée, faisons une intégration par parties :

$$F''(x) = \int_0^\infty \left(-\frac{2t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{\sin(xt)}{x^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right)dt$$
$$= \left[\frac{\sin(xt)}{x^2(t^2+1)} - \frac{t\cos(xt)}{x(t^2+1)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{x\cos(xt)}{x^2(t^2+1)} - \frac{\cos(xt)-xt\sin(xt)}{x(t^2+1)}\right)dt$$
$$= -\int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{t^2+1}dt.$$

Il est intéressant à ce stade d'observer que nous retrouvons finalement la formule

$$F''(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^\star,$$

mais pour justifier une dérivation sous l'intégrale une transformation de F' (voir (✘)) à été nécessaire; remarquez aussi que l'existence de $F''(0)$ reste ouverte. Nous avons donc :

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2+1}dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$
$$F''(x) = -\int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{t^2+1}dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^\star.$$

➪ *Ainsi, pour tout* $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$F(x) - F''(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}dt + \int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{x(t^2+1)}dt = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}dt = \begin{cases} C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ -C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star. \end{cases}$$

F est donc solution de l'équation différentielle $F - F'' = C$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $F - F'' = -C$ sur $\mathbb{R}_-^\star$ ce qui nous donne

$$F(x) = \begin{cases} ae^x + be^{-x} + C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ ce^x + de^{-x} - C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star. \end{cases}$$

(remarquez que ces équations impliquent $\lim_{0_+} F''(x) = C = -\lim_{0_-} F''(x)$ qui assurent si $C \neq 0$ que F'' admet à l'origine des limites à droite et à gauche différentes ce qui (propriété classique de l'application dérivéée, Darboux par exemple) nous permet d'affirmer que $F''(0)$ n'existe pas mais F' est tout de même dérivable à droite et à gauche en 0 avec $F''(0_+) = C = -F''(0_-)$...) F étant impaire, $a = -d, b = -c$ soit

$$F(x) = \begin{cases} ae^x + be^{-x} + C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ -be^x - ae^{-x} - C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star \end{cases}$$

et F continue à l'origine avec $F(0) = 0$ implique

$$F(0) = 0 = \lim_{x\to 0_+} F(x) = a + b + C = \lim_{x \to 0_-} F(x) = -a - b - C$$

soit $a + b = -C$; de même, F' continue à l'origine avec $F'(0) = \pi/2$ donne $a - b = \pi/2$ i.e. $2a = \pi/2 - C, 2b = -C - \pi/2$ et finalement

$$F(x) = \frac{\pi}{2} sh(x) - C ch(x) + C, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star.(\checkmark)$$

➪ *Il reste à évaluer C. Pour cela, montrons que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = C$. Soit $x > 0$,*

$$F(x) - C = F''(x) = \int_0^\infty \left(-\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2} \right) dt$$

(on a encore ici besoin de la première expression de F'' pour conclure facilement) pour $x \geq a > 0$, on a la domination

$$\left| -\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2} \right| \leq \frac{2t}{a^2(t^2+1)^2} + \frac{2t^2}{a(t^2+1)^2} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Donc par le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{x\to+\infty} (F(x) - C) = \int_0^\infty \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2} \right) dt = 0$$

soit avec ($\checkmark$)

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = C \quad \text{et} \quad F(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2} - C\right) e^x + C$$

qui donnent

$$C = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

C.Q.F.D. ❑

Références