Toujours un calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^{+\infty}\frac{sin(t)}{t}dt$ (3)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Toujours un calcul de l'intégrale de Cauchy*** $\int_0^{+\infty}\frac{sin(t)}{t}dt$ ***(3)***

Sachant que pour tout $a > 0$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(t)}{t+a}dt = \int_0^{\infty}\frac{e^{-at}}{t^2+1}dt,$$

montrer que

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Solution : *On à immédiatement pour $a > 0$*

$$\lim_{a\to 0_+}\frac{e^{-at}}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1} = f(t), \quad \forall\, t\in\mathbb{R}_+, \quad \text{et} \quad \left|\frac{e^{-at}}{t^2+1}\right| \leq f(t)\in L^1(\mathbb{R}_+)$$

donc, par convergence dominée

$$\lim_{a\to 0_+}\int_0^{\infty}\frac{e^{-at}}{t^2+1} = \int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour le terme de gauche, une convergence dominée est sans espoir car il est notoire (cf. exercice page **??**) *que*

$$t\mapsto\frac{\sin(t)}{t}\notin L^1(\mathbb{R}_+).$$

➪ *On peut tout de même justifier l'inversion des deux limites « à la main » par exemple en remarquant que*

$$\left|\int_0^{\infty}\frac{\sin(t)}{t+a}dt - \int_0^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\right| \leq \int_0^1\frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt + \int_1^{\infty}\frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt$$

le premier terme du second membre tend vers zéro avec a par convergence dominée car l'intégrande converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ avec la domination

$$\frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)} \leq \frac{|\sin(t)|}{t}\in L^1([0,1]).$$

Pour le second terme, l'affaire est encore plus simple puisque

$$\int_1^{\infty} \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)} dt \leq a \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2} \to_{a\to 0} 0.$$

➪ *On peut aussi, sans convergence dominée écrire pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t+a} dt - \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| &\leq \int_0^{\varepsilon} \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)} dt \\
&\leq \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{a}{t^2} dt \\
&\leq \varepsilon + \frac{a}{\varepsilon} \qquad \forall\ a, \varepsilon > 0 \\
&\leq 2\sqrt{a} \qquad \forall\ a > 0 \text{ (on a fait } \varepsilon = \sqrt{a})
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ❑

Remarque : *Voir l'exercice suivant pour démontrer :*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t+a} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at}}{t^2+1} dt, \forall\, a \in \mathbb{R}_+^{\star}.$$

Références