# Encore un calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

***Exercice 0.1*** ★ ***Encore un calcul de l'intégrale de Cauchy*** $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt$

*Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

***Solution :*** *La semi-convergence de cette intégrale est classique. Remarquons que*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{x}dx.$$

*Nous allons successivement montrer*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, (✔)$$

*puis*

$$\lim_{n\to\infty} \left( \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx \right) = 0, (✘)$$

*ce qui fournira la formule désirée.*
*Pour (✔), puisque pour tout* $x \in ]0, \pi/2[$

$$\frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin(2^{-1}(2n+1)x)}{2\sin(x/2)},$$

*soit*

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin(x)} = 1 + 2\cos(2x) + 2\cos(4x) + \cdots + 2\cos(2nx), \quad x \in ]0, \pi[$$

*qui donne immédiatement (✔).*
*Pour la seconde on peut écrire*

$$\lim_{n\to\infty} \left( \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \sin((2n+1)x)dx$$

*et cette dernière limite est nulle par le lemme de Riemann-Lebesgue ([**?**], page ???). D'où (✘).* ❑

# Références