Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt$ (1)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt$ (1)***

On considère l'application $f(x) := \int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}e^{-xt}dt$.

- *Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.*
- *En déduire une forme explicite de f sur $\mathbb{R}_+^\star$.*
- *Montrer que f est continue à l'origine.*
- *En déduire que $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.*

Solution : ➪ *Écrivons $f(x) = \int_0^\infty g(x,t)dt$ où $g(x,t) = e^{-xt}\frac{sin(t)}{t}$. Pour $x = 0$, $f(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ et nous retrouvons l'intégrale (convergente [1]) de Cauchy ; pour $x > 0$, comme $|g(x,t)| \leq e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, f est encore bien définie : f est finalement définie sur $\mathbb{R}_+$.*
Soit $a > 0$, nous avons

$$|g(x,t)| \leq e^{-at} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \textit{et} \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-at} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

De ces deux inégalités, le théorème de continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres assure que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad f'(x) = -\int_0^\infty \sin(t)e^{-xt}dt.$$

Remarque : *Il faut se garder, malgré les questions suivantes, de vouloir par ces théorèmes de domination obtenir la continuité de f à l'origine : en effet f est à l'origine définie par l'intégrale de Cauchy qui est notoirement non absolument convergente et une domination de g dans un voisinage de l'origine impliquerai assurément l'absolue convergence. C'est pourquoi d'ailleurs les dominations n'ont lieu que sur $[a, +\infty[$...*

➪ *L'expression de $f'(x)$ que nous venons d'obtenir nous permet un calcul explicite : soit $x > 0$*

$$\begin{aligned} f'(x) = -\int_0^\infty \sin(t)e^{-xt}dt &= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{it} - e^{-it}\right)e^{-xt}dt \\ &= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{t(i-x)} - e^{-t(i+x)}\right)dt \\ &= -\frac{1}{2i}\left(\left[\frac{e^{t(i-x)}}{i-x}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-t(i+x)}}{i+x}\right]_0^\infty\right) \\ &= -\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{i-x} - \frac{1}{i+x}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(les deux termes « entre crochets » sont nuls à l'infini car par exemple $|\frac{e^{-t(i+x)}}{i+x}| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2+1}} \to 0$ *lorsque* t *tends vers* $+\infty$*....). En intégrant cette formule, il vient*

$$\exists\, C \in \mathbb{R} \ : \ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star \qquad f(x) = -\arctan(x) + C.$$

La constante C *n'est pas difficile à déterminer, en effet la formule ci-dessus implique que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + C$$

et pour tout $x > 0$

$$|f(x)| \leq \int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

soit

$$-\frac{\pi}{2} + C = 0 \qquad \text{et} \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Résumons nous :

$$f(x) = \begin{cases} -\arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } x > 0 \\ \int_0^\infty \dfrac{\sin(t)}{t} dt, & \text{si } x = 0. \end{cases} \text{(✘)}$$

➪ *Il s'agit de montrer que*

$$\lim_{x\to 0_+} |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} \left(e^{-xt} - 1\right) \right| dt = 0.$$

Cette limite n'est pas triviale, on va faire une intégration par parties : considérons pour $t > 0$, $G(t) = \int_t^\infty \frac{\sin(u)}{u} du$. G *est dérivable et* $G'(t) = -\frac{\sin(t)}{t}$, *en outre la convergence de* $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ *implique* $\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$. *Ainsi*

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} \left(e^{-xt} - 1\right) \\ &= -\int_0^\infty G'(t) \left(e^{-xt} - 1\right) \\ &= \left[G(t) \left(e^{-xt} - 1\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty G(t) x e^{-xt} dt \\ &\underset{u=xt}{=} -\int_0^\infty G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du := -\int_0^\infty H(x,u) du \end{aligned}$$

et la fonction

$$H(x,u) = \begin{cases} G\left(\dfrac{u}{x}\right) e^{-u} & \text{si } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^\star$ *(la continuité en* $(0,u)$ *découle de* $\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$*) ; elle est aussi dominée par*

$$|H(x,u)| \leq e^{-u} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Donc par convergence dominée

$$\lim_{x\to 0_+} |f(x)-f(0)| = \lim_{x\to 0}\left|-\int_0^\infty H(x,u)du\right| = \left|-\int_0^\infty \lim_{x\to 0} H(x,u)du\right| = 0.(✔)$$

f est donc bien continue à l'origine.

➪ *(✘) et (✔) donnent immédiatement*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

❏

Références