Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère dans l'espace muni d'un repère $\mathcal{R}$, les deux droites d'équations :

$$\mathscr{D}\begin{cases} x - z - a &= 0 \\ y + 3z + 1 &= 0 \end{cases} \quad \mathscr{D}'\begin{cases} x + 2y + z - 2b &= 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 &= 0 \end{cases}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Montrer qu'elles ne sont pas parallèles.*
2. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que les deux droites soient sécantes. Former alors l'équation cartésienne de leur plan.*

Solution :

1. *On trouve un vecteur directeur de $\mathscr{D}$: $\overrightarrow{d} = (1, -3, 1)$ et de $\mathscr{D}'$: $\overrightarrow{d'} = (1, 1, -3)$. Ils ne sont pas colinéaires et donc les droites ne sont pas parallèles.*
2. *On détermine un point A de $\mathscr{D}$. On suppose que $x = a$ et on reporte dans le système définissant $\mathscr{D}$. Il vient $\begin{cases} z &= 0 \\ y + 3z + 1 &= 0 \end{cases}$ et donc $A\,(a, -1, 0)$. On fait de même pour $\mathscr{D}'$. On suppose que $y = b$ et on reporte dans le système définissant $\mathscr{D}'$. Il vient $\begin{cases} x + z &= 0 \\ 3x + 3b + 2z - 7 &= 0 \end{cases}$ donc $A'\,(7 - 3b, b, 3b - 7) \in \mathscr{D}'$. De plus $A \neq A'$. Les deux droites sont sécantes si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{d}', \overrightarrow{AA'}\right) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $-8a - 8b + 32 = 0$ ce qui s'écrit aussi $\boxed{a + b = 4}$. On pourrait aussi procéder ainsi. Les deux droites sont concourantes si et seulement si le système de 4 équations à 3 inconnues est compatible. On écrit :*

$$\begin{cases} x \quad - z = a \\ y + 3z = -1 \\ x + 2y + z = 2b \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = a & \\ y + 3z = -1 & \\ 2y + 2z = 2b - a & L_3 - L_1 \\ 3y + 5z = 7 - 3a & L_4 - 3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = a & \\ y + 3z = -1 & \\ -2z = b - \frac{a}{2} + 1 & \frac{L_3}{2} - L_2 \\ -4z = 10 - 3a & L_4 - 3L_2 \end{cases}.$$

Donc le système est compatible si et seulement si $2\left(b-\frac{a}{2}+1\right)=10-3a$ *c'est-à-dire si et seulement si* $\boxed{a+b=4}$.
On calcule facilement que l'équation du plan alors formé par les deux droites est $\boxed{2x+y+2-2a+1=0}$.

Références