Calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ (1)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 février 2023

Exercice 0.1 ★ **Calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ (1)**

On considère l'application $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$.

➪ *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

➪ *En déduire que f est solution d'une équation différentielle.*

➪ *Montrer que* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(on pourra introduire la fonction auxilliaire* $g(t) = e^{-t}f(t)$*...).*

Solution : ➪ *Notons*

$$f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = \int_0^\infty g(x,t)dt$$

où $g(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ *; c'est une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ *qui vérifie*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad |g(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

f est donc (par convergence dominée) continue sur $\mathbb{R}_+$. De même pour la dérivabilité, nous avons pour $a > 0$

$$\forall\, x \geq a > 0 \quad : \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \left|-\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \left|\frac{t^2e^{-at^2}}{1+t^2}\right|.$$

Toujours par convergence dominée, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et ceci pour tout $a > 0$: $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$. En résumé

$$f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap\ \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star) \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star \ : \quad f'(x) = -\int_0^\infty \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}dt.(✘)$$

➪ *Notons* $I = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2}dt$. *Avec (✘) nous avons pour tout* $x > 0$

$$f'(x) = -\int_0^\infty \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = f(x) - \int_0^\infty e^{-xt^2}dt \underset{u=t\sqrt{x}}{=} f(x) - \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

L'application $g(x) = e^{-x}f(x)$ *vérifie*

$$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = -e^{-x}\frac{I}{\sqrt{x}}.$$

Il existe donc une constante $C > 0$ *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \quad : \quad g(x) = C - I\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$$

En outre

$$\left(|g(x)| \leq e^{-x}|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\lim_{x\to\infty} g(x) = 0\right) (1)$$

et

$$g(x) = C - I\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \underset{u=\sqrt{t}}{=} C - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} C - 2I^2(2).$$

(1) *et* (2) *donnent* $C = 2I^2$. *On a donc*

$$f(x) = e^x g(x) = 2Ie^x\left(I - \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du\right) = 2Ie^x\int_{\sqrt{x}}^{\infty}, \quad \forall\, x > 0,$$

qui implique

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2I^2$$

et par continuité de f *à l'origine*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2},$$

soit $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ❏

Références