Irrationalité de e (1)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ **Irrationalité de e (1)**

[1]

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^x dx$.

➪ *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = a_n + eb_n$.*
➪ *On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $e = p/q$, montrer que*

$$I_n \geq q^{-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

➪ *En déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.*

Solution : ➪ *On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, $I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ et l'assertion est donc vraie pour $n = 0$ avec $a_0 = -1 = -b_0$. Supposons la propriété vrai au rang n avec $I_n = a_n + eb_n$, alors*

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 e^x x^{n+1} dx = \left[e^x x^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^x (n+1) x^n dx \\ &= e - (n+1) I_n = e - (n+1)(a_n + eb_n) = -(n+1)a_n + e(1 - (n+1)b_n) \end{aligned}$$

soit la propriété au rang $n + 1$, C.Q.F.D.

➪ *Supposons que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^\star$, alors*

$$0 < I_n = a_n + eb_n = \frac{qa_n + pb_n}{q},$$

qui implique

$$qa_n + pb_n \geq 1$$

et par conséquent

$$I_n \geq \frac{1}{q}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.(1)$$

D'un autre coté, on a la majoration immédiate

$$0 < I_n \leq \int_0^1 e x^n dx = \frac{e}{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.(2)$$

(1) et (2) donnent

$$0 < \frac{1}{q} \leq \frac{e}{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

qui est visiblement absurde : e est donc irrationel. ❑

Voir aussi pages **??** *et* **??** *pour d'autres démonstrations de l'irrationalité de e.*

Références

[1] M.Laczkovoch. Conjecture and Proof. Classroom Ressource Material. M.A.A., 2007.