Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

On considère les droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{D}' : \big\{ y = 2x + 1 z = 2x - 1$$

Montrer qu'il existe un unique couple de plans $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ *tels que*

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}, \quad \mathcal{D}' \subset \mathcal{P}' \quad \mathcal{P} // \mathcal{P}'$$

Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$.

Indication 0.0 : *On pourra utiliser la notion de faisceau de plans développée dans l'exercice* **??** *page* **??**

Solution : *Supposons qu'il existe deux plans* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *vérifiant les conditions de l'énoncé. Comme* $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ *appartient au faisceau de plan issu de* $\mathcal{D}$ *et comme* $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}'$, $\mathcal{P}'$ *appartient au faisceau de plan issu de* $\mathcal{D}'$. *Il existe alors* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\mathcal{P} : (x - z + 1) + \theta(y - 2z - 1) = 0$$

$$\mathcal{P}' : (y - 2x - 1) + \theta'(z - 2x + 1) = 0$$

On écrit l'équation cartésienne des plans vectoriels associés :

$$P : x + \theta y - (1 + 2\theta) z = 0$$

$$P' : -2(1 + \theta')x + y + \theta' z = 0$$

Ces deux plans sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\begin{vmatrix} 1 \\ \theta \\ -(1+2\theta) \end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} -2(1+\theta') \\ 1 \\ \theta' \end{vmatrix}$ *sont colinéaires. En utilisant le produit vectoriel, la condition de parallélisme s'écrit donc :*

$$\begin{cases} \theta\theta' + 2\theta + 1 & = 0 \\ 2(1+2\theta)(1+\theta') - \theta' & = 0 \\ 1 + 2\theta(1+\theta') & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \theta\theta' + 2\theta + 1 & = 0 \\ 4\theta\theta' + 4\theta + \theta' + 2 & = 0 \\ 2\theta\theta' + 2\theta + 1 & = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première et la troisième équation, on trouve $\theta\theta' = 0$. Mais $\theta = 0$ est impossible d'après la première équation, donc $\theta' = 0$. Il vient alors $\theta = -1/2$. On trouve finalement :

$$\boxed{\mathcal{P} : 2x - y + 3 = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P}' : -2x + y - 1 = 0}$$

Réciproquement, on vérifie que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ donnés par ces deux équations cartésiennes sont solutions du problème.

Références