$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k k^n = (-1)^{n+1}n!$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k k^n = (-1)^{n+1}n!$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k k^n = (-1)^{n+1}n!$$

On peut remarquer que $(e^{kx})_{x=0}^{(n)} = k^n$...

Solution : *Nous avons*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k k^n &= -\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k e^{kx}\right)\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-e^x)^n\right)\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\dots\right)^n\\ &= (-1)^{n+1}\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n+n\frac{x^{n+1}}{2}+\dots\right)\\ &= (-1)^{n+1}n!\end{aligned}$$

❑

Références