Un fameux théorème d'Émile Borel

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Un fameux théorème d'Émile Borel

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une application à support compact dans $] -2, 2[$ égale à 1 sur $[-1, 1]$. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels $(\lambda_n)_n$ vérifiant

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}, \quad \forall 0 \leq k \leq n-1.$$

Où $f_n(x) := \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x)$. En déduire l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solution : Soient $n \in \mathbb{N}^*, k \in \{0, \dots, n-1\}$. Avec la formule de Leibnitz

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{a_n}{n!} \sum_{p=0}^k C_k^p n(n-1) \dots (n-p+1) x^{n-p} \lambda_n^{k-p} \varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)$$

De plus $\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x) = 0$ pour $|x| \geq 2/|\lambda_n|$ d'où

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| &\leq \frac{|a_n|}{n!} \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} |x|^{n-p} |\lambda_n|^{k-p} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)| \\ &\leq n! \sum_{p=0}^k \frac{C_k^p}{(n-p)!} \left(\frac{2}{|\lambda_n|}\right)^{n-p} |\lambda_n|^{k-p} \sup_{\lambda_n x \in [-2, 2]} |\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)| \\ &\leq \frac{|a_n| M_n}{|\lambda_n|^{n-k}} \sum_{p=0}^k \frac{C_k^p 2^{n-p}}{(n-p)!} \end{aligned} \quad (\star)$$

où $M_n := \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\sup_{\lambda_n x \in [-2, 2]} |\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)| \right)$. D'autre part, avec les majorations grossières pour $0 \leq p \leq k \leq n-1$:

$$C_k^p \leq k! \leq (n-1)!, \quad \frac{2^{n-p}}{(n-p)!} \leq 2^n$$

supposons en outre $|\lambda_n| \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $1/|\lambda_n|^{n-k} \leq 1/|\lambda_n|$, et finalement $(\spadesuit)$ devient

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{|a_n| M_n}{|\lambda_n|^{n-k}} \sum_{p=0}^k k! 2^n \leq \frac{|a_n| M_n}{|\lambda_n|} 2^n n!.$$

de cette dernière inégalité, nous avons

$$|\lambda_n| \geq \max(1, M_n |a_n| 4^n n!) \quad (\spadesuit_n)$$

qui implique

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq 2^{-n}, \quad \forall 0 \leq k \leq n-1. (\spadesuit)$$

En résumé, toute suite $(\lambda_n)_n$ de réels vérifiant $(\spadesuit_n)$ convient.

Sous ces choix, considérons l'application $f := \sum_{n \geq 0} f_n$. L'inégalité $(\spadesuit)$ (avec $k = 0$) assure la normale convergence sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions définissant f qui est donc fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, pour $k \geq 1$, en écrivant

$$\sum_k f_n^{(k)} = \sum_{n \geq k} f_n^{(k)} + \sum_{n > k} f_n^{(k)}$$

l'inégalité $\sup_{\mathbb{R}} |f_n^{(k)}| < 2^{-n}$ pour $n > k$ implique que la série $\sum_n f_n^{(k)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$; ainsi (c'est le théorème de Weierstrass sur la dérivation des séries de fonctions), f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver « sous le $\sum$ » :

$$\begin{aligned} f^k(x) &= \sum_{n=0}^k f_n^{(k)}(x) + \sum_{n>k} f_n^{(k)}(x) \\ &= \left(\sum_{n=0}^k + \sum_{n>k} \right) \left(\sum_{p=0}^k \frac{a_n}{n!} C_k^p (x^n)^{(k)} (x^n \varphi(\lambda_n x))^{(n-p)} \right), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Maintenant, comme φ est constante égale à 1 sur $[-1, 1]$, ses dérivées d'ordre supérieur à 1 sont identiquement nulles sur $] -1, 1[$ donc en particulier à l'origine. De même

$$(x^n)^{(k)} \Big|_{x=0} = \begin{cases} n! & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De là, pour évaluer $f^{(k)}(0)$, seul un terme n'est pas nul dans l'expression précédente, il reste précisément :

$$f^{(k)}(0) = \frac{a_k}{k!} (x^n)^{(k)} \varphi(\lambda_n x) \Big|_{x=0} = a_k,$$

et f possède bien les propriétés désirées. □

Références