

Sur l'inégalité de Kolmogorov $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_1}$.

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

1^{er} janvier 2023

Exercice 0.1 ★ **Sur l'inégalité de Kolmogorov $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_1}$.**

[1]

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que

$$M_k := \sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)| < +\infty, \quad \forall k = 0, 1, 2.$$

❶ On suppose que $I = \mathbb{R}$. Montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_1}$.

❷ On suppose que $I = [-c, c]$, $c \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{c} + (x^2 + c^2) \frac{M_2}{2c}, \quad \forall x \in [-c, c]. (\text{✗})$$

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_1} \quad \text{si} \quad c \geq \sqrt{\frac{M_0}{M_2}}. (\text{✓})$$

❸ On suppose que $I = (c, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_1}$.

Solution :

Références

- [1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Sequences and Series, volume 1 of Student Mathematical Library. AMS, 2001.