Convexité et Accroisements Finis

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

8 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Convexité et Accroisements Finis***

Soit $f\ :\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ *une application dérivable vérifiant :*

$$\forall\, x\neq y \text{ dans }]a,b[,\quad \exists !\ \zeta\in]a,b[\text{ tel que } \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\zeta),$$

montrer que f *est soit strictement convexe, soit strictement concave sur* $]a,b[$.

Solution : *Supposons au contraire que* f *ne soit ni strictement convexe, ni strictement concave sur* $]a,b[$. *Il existe alors deux réels* $a<x_1<x_2<b$ *tels que le segment reliant les points* $(x_1,f(x_1))$ *et* $(x_2,f(x_2))$ *rencontre encore le graphe de* f *en au moins un point* $(x_3,f(x_3))$ *avec* $a<x_1<x_3<x_2<b$. *Par hypothèse il existe deux uniques réels* $y_1,y_2\in]a,b[$ *vérifiant*

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=f'(y_1)\quad \text{et}\quad \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}=f'(y_2),$$

et le théorème des accroissement finis nous assure que $x_1<y_1<x_3<y_2<x_2$, *soit* $y_1\neq y_2$. *D'un autre coté la colinéarité de* $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$ *et* $(x_3,f(x_3))$ *assure que*

$$f'(y_1)=\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}=f'(y_2),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse sur f. *D'où le résultat.* ❑

Références