

Parité, dérivabilité et développement limité

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Parité, dérivabilité et développement limité

On définit f sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) + \cos(x) & \text{si } x > 0, \\ \cos(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas paire mais que tous ses développements limités de f à l'origine sont sans termes de degré impair.

Solution : Comme dans l'exercice précédent pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) + o(x^n) & \text{si } x > 0, \\ \cos(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

au voisinage de 0_+ . Ainsi, f admet un développement limité à tout ordre à l'origine et c'est celui de la fonction cosinus : il est donc sans termes impairs.

Toutefois f n'est ni paire ni impaire puisque

$$|f(x) - f(-x)| = \exp(-\frac{1}{x^2}) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

□

Remarque : f n'est donc pas développable en série entière à l'origine.

Références