Faisceau de plans

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Faisceau de plans***

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équations cartésiennes :

$$\mathcal{D} \ : \begin{cases} ax+by+cz+d & =0 \\ a'x+b'y+c'z+d' & =0 \end{cases}.$$

On appelle faisceau de plans issu de $\mathcal{D}$ *l'ensemble des plans de l'espace contenant $\mathcal{D}$.*

Montrer qu'un plan $\mathcal{P}$ est élément du faisceau issu de $\mathcal{D}$ si et seulement si il a une équation cartésienne de la forme :

$$\mathcal{P} \ : \alpha\left(ax+by+cz+d\right)+\beta\left(a'x+b'y+c'z+d'\right)=0$$

où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ sont deux réels non tous deux nuls.

Solution : *Posons $\overrightarrow{n}=\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{n}'=\begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}$. Un vecteur directeur à $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n}'$. Notons $\mathscr{V}$ la plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$. Tout vecteur de ce plan est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Réciproquement, tout vecteur orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est élément de $\mathscr{V}$.*

- *Supposons que $\mathcal{P}$ est élément du faisceau issu de $\mathcal{D}$. Un vecteur $\overrightarrow{N}$ normal à $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et est donc élément du plan vectoriel $\mathscr{V}$. Par conséquent, il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ non tous deux nuls tels que $\overrightarrow{N}=\alpha\overrightarrow{n}+\beta\overrightarrow{n}'$. Une équation de $\mathcal{P}$ est alors de la forme $\alpha\left(ax+by+cz\right)+\beta\left(a'x+b'y+c'z\right)+D=0$ où $D\in\mathbb{R}$. Considérons un point $M\in\mathcal{D}$. Comme les coordonnées de M vérifient à la fois les équations de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$, on obtient : $D=\alpha d+\beta d'$. On a ainsi prouvé qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme proposée.*
- *Réciproquement, supposons que $\mathcal{P}$ ait une équation cartésienne de la forme : $\mathcal{P}$: $\alpha\left(ax+by+cz+d\right)+\beta\left(a'x+b'y+c'z+d'\right)=0$. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\alpha\overrightarrow{n}+\beta\overrightarrow{n}'$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ car élément de $\mathscr{V}$. La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont donc parallèles. On*

considère alors un point M de $\mathcal{D}$. Comme les coordonnées de M vérifient les équations de $\mathcal{D}$, elles vérifient l'équation de $\mathcal{P}$ et donc $M \in \mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}$ contient alors nécessairement la droite $\mathcal{D}$.

Références