Toute application convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Toute application convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, convexe et majorée : montrer que f est constante.

Solution : *Si f n'est pas constante, on peut trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$ et la formule de Taylor-Lagrange nous donne pour*

$$x \in \mathbb{R},\ \exists \zeta_x \in (a,x) \quad : \quad f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2} f''(\zeta_x) \geq f(a) + xf'(a)$$

la dernière inégalité résultant du fait que

$$(f \text{ deux fois dérivable et convexe}) \quad \Longrightarrow \quad (f'' \geq 0)\,.$$

Si par exemple $f'(a) > 0$ on obtient alors une contradiction en faisant tendre x vers $+\infty$ (et vers $-\infty$ si $f'(a) < 0$...) ❑

Remarques : ➪ *Si la fonction est seulement convexe le résultat bien entendu subsiste, il faut juste être un peu plus délicat : si f est non constante, soient $a < b$ vérifiant $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$ et pour tout $a < b < x$*

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(\frac{x-b}{x-a}a + \frac{b-a}{x-a}x\right) \\ &\leq \frac{x-b}{x-a}f(a) + \frac{b-a}{x-a}f(x), \end{aligned}$$

soit

$$\forall\, x > b > a, \qquad f(x) \geq \frac{x-a}{b-a}f(b) - \frac{x-b}{b-a}f(a). \qquad (\bigstar)$$

Si $f(b) > f(a)$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(b) = f(a) + \delta$ et $(\bigstar)$ devient pour tout $x > b$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{x-a}{b-a}f(b) - \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{a-b}{b-a}\right)f(a) \\ &= \frac{x-a}{b-a}\left(f(b) - f(a)\right) + f(a) \\ &\geq \frac{x-a}{b-a}\delta + f(a) := h(x) \end{aligned}$$

la fonction h est non majorée sur $]b,+\infty[$, il en est donc de même pour f d'où la contradiction. On procède de manière analogue si $f(b) < f(a)$ en établissant pour $x < a < b$ avec $\delta := f(a) - f(b)$

$$f(x) \geq \frac{b-x}{b-a}\delta + f(b)$$

➪ *Ce résultat ne subsiste plus si on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle de la forme $(a,+\infty[$ (resp. $]-\infty,a)$), il suffit par exemple de considérer $f(x) = e^{-x}$ (resp. $f(x) = e^{x}$).*

Références