Dérivabilité et accroissements finis

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Dérivabilité et accroissements finis***

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *une application dérivable sur* $]a,b[$ *sauf peut être en un point* $c \in]a,b[$. *Si* $f'(x)$ *admet une limite* l *lorsque* x *tend vers* c, *montrer que* f *est dérivable en* c *et* $f'(c) = l$.

Solution : *Soit* $a < x < c$, *appliquons le théorème des accroissements finis à* f *sur* $[x,c]$ *: il existe* $x < \eta_x < c$ *tel que*

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\eta_x).$$

Mais

$$(x < \eta_x < c) \quad \Longrightarrow \quad \left(\lim_{x\to c_-} \eta_x = c\right)$$

donc, vu les hypothèses sur f *:*

$$\lim_{x\to c_-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c_-} f'(\eta_x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = l.$$

f *est donc dérivable à gauche au point* c *avec* $f'_g(c) = l$, *on fait de même à droite.* ❑

Références