Dérivabilité et accroissements finis

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ **Dérivabilité et accroissements finis**

Soit $f\ :\ [a,b) \to \mathbb{R}$ *une application dérivable. Montrer que* $f'(a)$ *est valeur d'adhérence de* $f'(]a,b[)$.

Solution : *Il faut donc montrer que* $\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0\ :\ \exists \zeta \in]a, a+\eta[$ *tel que* $|f'(a) - f'(\zeta)| \leq \varepsilon$. f *étant dérivable (à droite)*

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0\ :\ \forall\,x \in]a, a+\eta[\ :\ \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leq \varepsilon, (✘)$$

mais pour un tel x *le théorème des accroissements finis assure de l'existence d'un* $\zeta \in]a, x[$ *tel que* $f(x) - f(a) = (x-a)f'(\zeta)$. *Il ne reste plus qu'à reporter dans (✘) pour conclure.* ❑

Remarques : ➪ *les discontinuités de l'application dérivée* f' *ne sont donc pas arbitraires, par exemple une discontinuité de première espèce (un saut) est proscrite pour une dérivée. Il faut d'ailleurs se souvenir du théorème de qui dit que* f' *possède la propriété des valeurs intermédiaires (on peut aussi traiter cet exercice avec Darboux).*

➪ *Tant que nous y sommes, il est essentiel pour la leçon sur la dérivabilité d'avoir un exemple d'une fonction dérivable en un point à dérivée non continue, l'exemple canonique étant*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}) & \textit{si } x \neq 0, \\ 0 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

Références