Sur le point d'inflexion

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur le point d'inflexion***

On définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \left(\sin(x^{-1}) + 2\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet en $x = 0$ un point d'inflexion bien que $f''(0) = 0$ sans toutefois garder un signe constant à droite et à gauche de l'origine.

Solution : *On montre facilement que f est deux fois dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = f''(0) = 0$. En outre $x = 0$ est bien point d'inflexion de f car f est > 0 sur $\mathbb{R}_+^\star$ et < 0 sur $\mathbb{R}_-^\star$ alors que la tangente à l'origine au graphe de f est l'axe des abcisses. Toutefois, après un petit calcul on a au voisinage de l'origine $f''(x) = -x\sin(x^{-1}) + o(x)$ qui n'est bien sûr pas de signe constant sur aucun voisinage à droite (et à gauche) de zéro.* ❏

Remarque : *si f est deux fois dérivable au voisinage d'un point a et si sa dérivée seconde s'y annule en changeant de signe alors f admet un point d'inflexion en a. La réciproque est donc fausse.*

Références